SET-1

समय : 1 घंटा 10 मिनट | पूर्णांक : 40

Time : 1 Hours 10 Min. | **Full Marks : 40**

खण्ड – I (वस्तुनिष्ठ प्रश्न)

SECTION-I (OBJECTIVE TYPE QUESTIONS)

प्रश्न संख्या 1 से 40 तक निम्न में दिए गए चार विकल्पों में से एक ही उत्तर सही है। प्रत्येक प्रश्न के सही उत्तर को उत्तर तालिका में चिह्नित करें। **40 × 1 = 40**

From Question No. 1 to 40 there is one correct answer. In each question you have to mark that correct option from given options. **40 × 1 = 40**

1. अगर $x = a\cos\theta, y = b\sin\theta$ तो $\frac{dy}{dx}$ का मान निम्न में से क्या है ?

If $x = a\cos\theta, y = b\sin\theta$ then which of the following is values of $\frac{dy}{dx}$

(A) $\frac{-b}{a}\cot\theta$ (B) 0 (C) $\frac{b}{a}\tan\theta$ (D) $\frac{-b}{a}\tan\theta$

2. $\int\frac{1-\sin x}{\cos^2 x}dx$ निम्न में से किसके बराबर हैं?

$\int\frac{1-\sin x}{\cos^2 x}dx$ equal to which of the following ?

(A) $\tan x - \sec x + c$ (B) $\sec x - \tan x + c$ (C) $\tan x + \sec x + c$ (D) None of these

3. निम्न में x^x का अवकलन x के सापेक्ष में कौन-सा हैं?

Derivative of x^x with respect to x is equal to which of the following.

(A) $x^x(\log x + 1)$ (B) x/x^{x-1} (C) $x \cdot x^x$ (D) $1 + \log x$

4. $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\log\left(\frac{4-3\sin x}{4+3\cos x}\right)dx$ का मान निम्न में से कौन है?

The value of $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\log\left(\frac{4-3\sin x}{4+3\cos x}\right)dx$ is

(A) $\frac{3}{4}$ (B) 0 (C) 2 (D) $\frac{1}{4}$

5. वृत्त की त्रिज्या 0.7 cm/s की दर से बढ़ रही है तो निम्न में से उसके परिधि बढ़ने की दर क्या है?

The radius of a circle is increasing at the rate of 0.7 cm/s then which of the following is the rate of increase of its circumference ?

(A) 2π cm/s (B) 0.7 cm/s (C) 1.4 cm/s (D) None of these

6. A एक 3×3 क्रम का वर्ग आव्यूह है तो निम्न में $|KA|$ का मान कौन सा है?

Let A be a square matrix of order 3×3 then $|KA|$ equal to which of the following ?

(A) $3K|A|$ (B) $K^3|A|$ (C) $K|A|$ (D) $K^2|A|$

7. यदि E और F इस प्रकार की घटना है की $P\left(\frac{E}{F}\right) = P\left(\frac{F}{E}\right)$ तो निम्न में से कौन सत्य है?

If E and F are events such that $P\left(\frac{E}{F}\right) = P\left(\frac{F}{E}\right)$ then which is the following is true ?

(A) $P(E) = P(F)$ (B) $E = F$ (C) $E \subset F$ but $E \neq F$ (D) $E \cap F = \phi$

8. यदि A और B एक दूसरे के प्रतिलोम आव्युह है तो निम्न में से कौन सत्य है।

If A and B are inverse matrix of each other then which of the following it true.

(A) $AB = BA$ (B) $AB = BA = 0$ (C) $AB = BA = I$ (D) $AB = 0, BA = I$

9. यदि $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ और A_{ij} सहखण्ड a_{ij} का है तो Δ का मान निम्न में से कौन है?

If $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ and A_{ij} is the co-factor of a_{ij} then which is the following value of Δ ?

(A) $a_{11}A_{11} - a_{21}A_{21} + a_{31}A_{31}$ (B) $a_{11}A_{12} + a_{21}A_{22} + a_{31}A_{32}$

(C) $a_{11}A_{11} + a_{21}A_{21} + a_{31}A_{31}$ (D) $A_{11} + A_{12} + A_{13}$

10. यदि $\begin{vmatrix} x & 2 \\ 18 & x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6 & 2 \\ 18 & 6 \end{vmatrix}$ तो x बराबर है ?

If $\begin{vmatrix} x & 2 \\ 18 & x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6 & 2 \\ 18 & 6 \end{vmatrix}$ then which is the value of x ?

(A) 6 (B) –6 (C) ±6 (D) None of these

11. अवकल समीकरण का घात है—

$$\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)^2 + \frac{dy}{dx} + \cos\left(\frac{dy}{dx}\right) + 7 = 0$$

The degree of the diff. equation is

$$\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)^2 + \frac{dy}{dx} + \cos\left(\frac{dy}{dx}\right) + 7 = 0$$

(A) 2 (B) 1 (C) 3 (D) Not defined

12. रेखा $y = 2x + 3, y = 0, x = 4, x = 6$ से धीरे चतुर्भुज का क्षेत्रफल निम्न में से कौन सा होगा?

The area of guardriateral formed by the lines $y = 2x + 3, y = 0, x = 4, x = 6$ is equal to which of the following ?

(A) 26 square unit (B) 24 square unit (C) 20 square unit (D) None of these

13. $\int \frac{xe^x}{(1+x)^2}dx$ निम्न में से किसके बराबर होगा?

$\int \frac{xe^x}{(1+x)^2}dx$ is equal to which of the following ?

(A) $\frac{e^x}{1+x}+c$ (B) $\frac{-e^x}{(1+x)^2}+c$ (C) $c^x(x+1)+c$ (D) $\frac{c^x}{1+x^2}+c$

14. निम्न में से कौन $\sin^{-1}\left[\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right]$ का मान होगा ?

Which the following is value of $\sin^{-1}\left[\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right]$

(A) $\frac{2\pi}{3}$ (B) $\frac{\pi}{6}$ (C) $\frac{\pi}{3}$ (D) $\frac{-3\pi}{4}$

15. किसी रेखा का दिक् अनुपात 2,3,7 है तो निम्न में से कौन-सा दिक् कोज्या है?

The direction ratio of a line are 2,3,7 then its direction cosines are which of the following ?

(A) $\frac{1}{6},\frac{1}{4},\frac{7}{12}$ (B) $\sqrt{\frac{2}{62}},\sqrt{\frac{3}{62}},\sqrt{\frac{7}{62}}$ (C) $\frac{2}{\sqrt{62}},\frac{3}{\sqrt{62}},\frac{7}{\sqrt{62}}$ (D) $\frac{2}{12},\frac{3}{12},\frac{7}{12}$

16. अगर $\sin^{-1}x+\sin^{-1}y=\frac{\pi}{3}$ तब $\cos^{-1}x+\cos^{-1}y$ का मान निम्न में से कौन है?

If $\sin^{-1}x+\sin^{-1}y=\frac{\pi}{3}$ then the value of $\cos^{-1}x+\cos^{-1}y$ is equal to which of the following :

(A) $\frac{\pi}{6}$ (B) $\frac{\pi}{3}$ (C) $\frac{2\pi}{3}$ (D) π

17. अगर $\tan^{-1}x+\tan^{-1}y+\tan^{-1}z=\frac{\pi}{2}$ तो $xy+yz+zx$ का मान निम्न में से किसके बराबर है।

If $\tan^{-1}x+\tan^{-1}y+\tan^{-1}z=\frac{\pi}{2}$ then the value of $xy+yz+zx$ is equal to which of the following.

(A) -1 (B) 1 (C) 0 (D) None of these

18. अगर $(2x, x+y)=(6,2)$ तो x और y का मान निम्न में से कौन होगा?

Which of the following will be value of x and y if $(2x, x+y)=(6,2)$

(A) $x=3, y=-1$ (B) $x=1, y=5$ (C) $x=-1, y=3$ (D) $x=5, y=1$

19. A binary composection * is defined on $R\times R$ by $(a,b)(c,d)=(ac, bc\neq d)$, where $a,b,c,d\in R$ then (2,3) * (1) is equal to which of the following

(A) (1,2) (B) (2,1) (C) (1,1) (D) 2,2

20. अगर $A=\{1,2,3\}$, $B=\{5,6,7\}$ और $f: A\longrightarrow B$ एक फलन है जबकि $f(x)=x+4$ तो f किस तरह का फलन है?

If $A=\{1,2,3\}$, $B=\{5,6,7\}$ और $f: A\longrightarrow B$ is a function such that $f(x)=x+4$, then what type of function is f—

(A) many-one-onto (B) constant function (C) one-one onto (D) into

21. माना कि $A = \{1,2,3,4,\ldots n\}$ तो $f: A \to A$ कितने एक-एक आन्टु (आच्छादक) फलन होगा?

Let $A = \{1,2,3,4,\ldots n\}$. How many bijective function $f: A \to A$ can be defined ?

(A) $\frac{1}{2}(n!)$ (B) $(n-1)!$ (C) $n!$ (D) n

22. बिंदु स्थिति-सदिश के साथ (2,6), (1,2) और (P, 10) सरेख होंगे तो P का मान निम्न में से कौन सा होगा?

The point with position vectors (2,6), (1,2) and (P,10) are collinear if the value of P is

(A) 3 (B) –3 (C) 12 (D) 6

23. वक्र $y = e^p \cos^{-1} x$ के सापेक्ष अवकल समीकरण निम्न में से कौन होगा?

The differential equation corresponding to curve $= e^p \cos^{-1} x$ will be equal to which of the following ?

(A) $(1-x^2)y^n - xy' - p^2 y = 0$ (B) $(1-x^2)\,y'' - xy' + p^2 y = 0$

(C) $\sqrt{1-x^2}\,y' = py$ (D) $(1-x^2)y'' + xy' - p^2 y = 0$

24. यदि A एक $n \times n$ का अशून्य है तो $|\text{adj } A|$ का मान निम्न में कौन-सा है?

Let A be a non-singular matrix of the order $n \times n$ then the $|\text{adj } A|$ is equal to which of the following ?

(A) $n|A|$ (B) $|A|^{n-1}$ (C) $|A|$ (D) $|A|^n$

25. अगर $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ तो A^2 निम्न में से किसके बराबर है?

If $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ then A^2 is equal to which of the following ?

(A) $27A$ (B) $2A$ (C) $3A$ (D) 1

26. जब $2\begin{bmatrix} a & b \\ -a & 2b \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \end{bmatrix}$ तो a और b का मान निम्न में से कौन है?

The values of a and b, when $2\begin{bmatrix} a & b \\ -a & 2b \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \end{bmatrix}$ are equal which of the following

(A) $a = 1, b = -3$ (B) $a = -1, b = 3$ (C) $a = 1, b = 3$ (D) $a = -1, b = -3$

27. अगर $2\begin{bmatrix} x & 5 \\ 3 & y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 10 \\ 6 & 6 \end{bmatrix}$ तो x और y का मान निम्न में से कौन है?

If $2\begin{bmatrix} x & 5 \\ 3 & y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 10 \\ 6 & 6 \end{bmatrix}$ then the value of x and y are

(A) $x = 2, y = 3$ (B) $x = 3, y = 2$ (C) $x = 2, y = 2$ (D) $x = 3, y = 3$

28. अगर $\begin{bmatrix} x+1 & x-1 \\ x-3 & x+2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ तो x का मान निम्न में से कौन होगा?

If $\begin{bmatrix} x+1 & x-1 \\ x-3 & x+2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ then which of the following is the value of x ?

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4

29. सारणिक का मान निम्न में से कौन होगा ?

Which of the following value of the determinant ?

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 7 \\ 5 & 0 & 2 \\ 2 & 5 & 3 \end{vmatrix}$$

(A) 124 (B) 125 (C) 134 (D) 144

30. यदि $y = x + \frac{1}{x}$ तो निम्न में से कौन $\frac{dy}{dx}$ होगा?

Which of the following value of $\frac{dy}{dx}$ if $y = x + \frac{1}{x}$

(A) $1 - \frac{1}{x^2}$ (B) $1 + \frac{1}{x^2}$ (C) $1 - \frac{1}{x}$ (D) $x - \frac{1}{x}$

31. अगर $y = \tan^{-1} \frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}$ तो $\frac{dy}{dx}$

If $y = \tan^{-1} \frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}$ then $\frac{dy}{dx}$

(A) $\frac{1}{2\left(1+x^2\right)}$ (B) $\frac{1}{1+x^2}$ (C) $\frac{2}{1+x^2}$ (D) None of these

32. वक्र $x^2 = 2y$ पर बिंदु (0,5) से निकटतम बिन्दु कौन सा है?

The point on the curve $x^2 = 2y$ which is nearest point (0,5) is

(A) $\left(2\sqrt{2}, -1\right)$ (B) $\left(2\sqrt{2}, 0\right)$ (C) (0,0) (D) (2,2)

33. $\int \frac{10x^9 + 10^x \log_e^{10}}{x^{10} + 10^x}$ is equal to (बराबर है)

(A) $(x^{10} + 10^x)^1 + c$ (B) $10^x - x^{10} + c$ (C) $x^{10} + 10^x + c$ (D) $\log(x^{10} + 10^x) + c$

34. $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(x^3 + x\cos x + \tan^5 x + 1\right) dx = ?$

(A) $\frac{\pi}{2}$ (B) π (C) 0 (D) 2

35. निम्न में से $\int \frac{1}{1+x^2} dx$ का मान कौन-सा होगा?

Which of the following is value of $\int \frac{1}{1+x^2} dx$

(A) $\tan^{-1}x$ (B) $\cot^{-1}x$ (C) $\sin^{-1}x$ (D) None of these

36. अवकल समीकरण $\frac{dy}{dx}=\frac{x+y}{x}$ का हल निम्न में कौन-सा होगा जबकि $y(1)=1$

Then solution of the differential equation $\frac{dy}{dx}=\frac{x+y}{x}$ when $y(1)=1$ is which of the following

(A) $y=\log x+x$ (B) $y=\log x+x^2$ (C) $y=xc^x-1$ (D) $y=x\log x+x$

37. निम्न में $\vec{k}\times\vec{i}$ का मान कौन-सा होगा?

The value of $\vec{k}\times\vec{i}$ is which of the following

(A) $\vec{j}$ (B) $\vec{k}$ (C) $\vec{i}$ (D) $\vec{i}\times\vec{j}$

38. यदि $\vec{a}\times\vec{b}=0$ तो निम्न में $\vec{a}\cdot\vec{b}$ का मान कौन-सा होगा?

If $\vec{a}\times\vec{b}=0$, then which of the following is value of $\vec{a}\cdot\vec{b}$

(A) 0 (B) 1 (C) $\left|\vec{a}\right|.\left|\vec{b}\right|$ (D) None of these

39. A unit vector perpendicular to both the vectors $\vec{i}+\vec{j}$ and $\vec{j}+\vec{k}$ is which of the following

(A) $\frac{\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}}{\sqrt{3}}$ (B) $\frac{\vec{i}-\vec{j}+\vec{k}}{\sqrt{3}}$ (C) $\frac{-\vec{i}-\vec{j}+\vec{k}}{\sqrt{3}}$ (D) None of these

40. अगर $P\left(\frac{A}{B}\right)>P(A)$ तो निम्न में कौन सही है

If $P\left(\frac{A}{B}\right)>P(A)$, then which of the following correct

(A) $P\left(\frac{B}{A}\right)<P(B)$ (B) $P(A\cap B)<P(A)\cdot P(B)$

(C) $P\left(\frac{B}{A}\right)<P(B)$ (D) $P\left(\frac{B}{A}\right)=P(B)$

ANSWERS

1.	(A)	**2.**	(A)	**3.**	(A)	**4.**	(B)	**5.**	(C)	**6.**	(B)	**7.**	(A)	**8.**	(C)	**9.**	(C)	**10.**	(C)
11.	(D)	**12.**	(A)	**13.**	(A)	**14.**	(C)	**15.**	(C)	**16.**	(C)	**17.**	(B)	**18.**	(A)	**19.**	(B)	**20.**	(C)
21.	(C)	**22.**	(A)	**23.**	(D)	**24.**	(B)	**25.**	(C)	**26.**	(A)	**27.**	(A)	**28.**	(B)	**29.**	(C)	**30.**	(A)
31.	(A)	**32.**	(A)	**33.**	(D)	**34.**	(B)	**35.**	(A)	**36.**	(D)	**37.**	(A)	**38.**	(C)	**39.**	(B)	**40.**	(C)

खण्ड – II (गैर – वस्तुनिष्ठ प्रश्न)

SECTION-II (NON-OBJECTIVE TYPE QUESTIONS)

समय : 2 घंटा 05 मिनट **पूर्णांक : 60**
Time : 2 Hours 05 Min. **Full Marks : 60**

लघु उत्तरीय प्रश्न
(Short Answer Type Question)

प्रश्न संख्या 1 से 8 तक लघु उत्तरीय प्रकार के हैं। प्रत्येक के लिए 4 अंक निर्धारित है। **8 × 4 = 32**
Question Nos. 1 to 8 are of short answer type. Each question carries 4 marks. **8 × 4 = 32**

1. सिद्ध करें कि $\cos^{-1}\frac{3}{5}+\cos^{-1}\frac{12}{13}+\cos^{-1}\frac{63}{65}=\frac{\pi}{2}$

Prove that $\cos^{-1}\frac{3}{5}+\cos^{-1}\frac{12}{13}+\cos^{-1}\frac{63}{65}=\frac{\pi}{2}$

2. यदि $A=\begin{bmatrix}3 & 1\\ 7 & 2\end{bmatrix}$, तो $A^2-5A+7I=0$ का मान निकालें।

If $A=\begin{bmatrix}3 & 1\\ 7 & 2\end{bmatrix}$, then find the value of $A^2-5A+7I=0$

3. मान निकालें (Evaluate) : $\begin{vmatrix}a & h & g\\ h & b & f\\ g & f & c\end{vmatrix}$

4. x के लिए हल करें (Solve for x) : $\sin\left(\sin^{-1}\frac{1}{5}+\cos^{-1}x\right)=1$

5. यदि $xy=\tan(x+y)$, तो $\frac{dy}{dx}$ का मान निकालें।

If $xy=\tan(x+y)$, then find $\frac{dy}{dx}$

6. समाकलन करें (Integrate) : $\int \tan^3 2x\sec 2x dx$

7. यदि $\vec{a}=2\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}$ तथा $\vec{b}=\vec{i}-2\vec{j}+\vec{k}$ तब $\vec{a}\times\vec{b}$ ज्ञात करें।

If $\vec{a}=2\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}$ and $\vec{b}=\vec{i}-2\vec{j}+\vec{k}$ then find $\vec{a}\times\vec{b}$.

8. एक पासा के फेंकने में यदि सम संख्या आती हो, तो उसके 2 से अधिक होने की क्या प्रायिकता है?
What is the probability of the accurrence of a number greater than 2 if it is known that only even numbers can occur ?

दीर्घ उत्तरीय प्रश्न
(Long Answer Type Question)

प्रश्न संख्या 9 से 12 तक दीर्घ उत्तरीय प्रकार के हैं। प्रत्येक के लिए 7 अंक निर्धारित है। **4 × 7 = 28**

Question Nos. 9 to 12 are of short answer type. Each question carries 7 marks. **4 × 7 = 28**

9. हल करें (Solve) : $\left(1+x^2\right)\frac{dy}{dx}-2xy=\left(x^2+2\right)\left(x^2+1\right)$

Or, हल करें (Solve) : $\frac{dy}{dx}+\frac{y}{x}=e^x; x>0$

10. सिद्ध करें कि (Prove that) : $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\log\left(1+\tan\theta\right)d\theta=\frac{\pi}{8}\log 2$

11. उस बिंदु के नियामक ज्ञात करें जहाँ बिंदुओं (3,4,1) और (5,1,6) को मिलाने वाली सरल रेखा, xy-तल को काटती है।

Find the co-ordinates of the point where the line through the points (3,4,1) and (5,1,6) crosses the xy-plane.

12. अधिकतमीकरण करें $Z = 3x + 2y$

जबकि $x + 2y \le 10$

$3x + y \le 15$

$x, y \ge 0$

Maximise $Z = 3x + 2y$

Subject to $x + 2y \le 10$

$3x + y \le 15$

$x, y \ge 0$

ANSWERS

1. Let $\cos^{-1}\frac{3}{5}=x$

$\cos^{-1}\frac{12}{13}=y$ and $\cos^{-1}\frac{63}{65}=z$

Then $\cos x=\frac{3}{5},\cos y=\frac{12}{13},\cos z=\frac{63}{65}$

Hence $\sin x=\frac{4}{5},\sin y=\frac{5}{13}$ and $\sin z=\frac{16}{65}$

Now, $\cos(x+y)=\cos x\cdot\cos y-\sin x\cdot\sin y$

$$=\frac{3}{5}\times\frac{12}{13}-\frac{4}{5}\times\frac{5}{13}$$

$$=\frac{36}{65}-\frac{20}{25}=\frac{16}{65}$$

$\Rightarrow \quad x + y = \cos^{-1}\dfrac{16}{65}$

$\because \quad \sin z = \dfrac{16}{65}$ we have $z = \sin^{-1}\dfrac{16}{65}$

Hence $x + y + z = \cos^{-1}\dfrac{16}{65} + \sin^{-1}\dfrac{16}{65} = \dfrac{\pi}{2}$ $\left[\because \cos x + \sin^{-1} x = \dfrac{\pi}{2}\right]$

2. We have, $A^2 = A \cdot A$

$$= \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 9-1 & 3+2 \\ -3-2 & -1+4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 5 \\ -5 & 3 \end{bmatrix}$$

$\therefore \quad A^2 - 5A + 7I$

$$= \begin{bmatrix} 8 & 5 \\ -5 & 3 \end{bmatrix} - 5\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} + 7\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 8 & 5 \\ -5 & 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 15 & 5 \\ -5 & 10 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 7 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 8 & 5 \\ -5 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -15 & -5 \\ 5 & -10 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 7 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 8-15+7 & 5-5+0 \\ -5+5+0 & 3-10+7 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = 0$$

3. Here $\Delta = a\begin{vmatrix} b & f \\ f & c \end{vmatrix} - h\begin{vmatrix} h & g \\ f & c \end{vmatrix} + g\begin{vmatrix} h & g \\ b & f \end{vmatrix}$

$= a(bc - f^2) - h\,(hc - fg) + g\,(fh - bg)$

$= abc - af^2 - h^2c + fgh + fgh - bg^2$

$= abc + 2fgh - af^2 - bg^2 - ch^2$

4. From the given equation, we have

$$\sin^{-1}\left(\frac{1}{5}\right) + \cos^{-1} x = \frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow \quad \cos^{-1} x = \frac{\pi}{2} - \sin^{-1}\left(\frac{1}{5}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{1}{5}\right)$$

$\boxed{\because \sin^{-1} x + \cos^{-1} x = \frac{\pi}{2}}$

5. Differentiating both sides w.r. to x, we get

$$x \cdot \frac{dy}{dx} + y \cdot 1 = \sec^2(x+y)\left[1 + 1 \cdot \frac{dy}{dx}\right]$$

$$= \frac{dy}{dx}\left[x - \sec^2(x+y)\right]$$

$$= \sec^2(x+y) - y$$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = \frac{\sec^2(x+y) - y}{x - \sec^2(x+y)}$$

6. The given integral

$$I = \int \tan^3 2x \sec 2x dx$$

$$= \int \tan^2 2x \sec 2x \tan 2x dx$$

$$= \int (\sec^2 2x - 1) \sec 2x \tan 2x dx$$

Let $\sec 2x = u$

$\therefore \quad 2\sec 2x \tan 2x dx = du$

$$\therefore \quad I = \int (u^2 - 1)\frac{1}{2} du$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{u^3}{3} - u\right] = \frac{1}{2}u\left[\frac{u^2}{3} - 1\right]$$

$$= \frac{u}{6}(u^2 - 3)$$

$$= \frac{1}{6}\sec 2x(\sec^2 2x - 3) + c$$

7. Here $\vec{a} = 2\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$ and $\vec{b} = \vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}$

$$\therefore \quad \vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \vec{i}(1+2) - \vec{j}(2-1) + \vec{k}(-4-1) = 3\vec{i} - \vec{j} - 5\vec{k}$$

Hence $\left|\vec{a} \times \vec{b}\right| = \sqrt{3^2 + (-1)^2 + (-5)^2} = \sqrt{9+1+25} = \sqrt{35}$

8. Let A = Event of even number on the dice

$= \{2,4,6\}$

B = Even of greater than 2

$= \{4,6\}$

$A \cap B = \{4,6\}$

Similary, $n(A \cap B) = 2$

$n(s) = n(A) = 3$

$$\therefore \quad P\left(\frac{B}{A}\right) = \frac{n(A \cap B)}{n(A)} = \frac{2}{3}$$

9. From the given equation, we have

$$\frac{dy}{dx} - \frac{2x}{1+x^2} y = x^2 + 2$$

Here $I.F. = e^{-\int \frac{2x}{1+x^2} dx} = e^{-\log(1+x^2)} = e^{\log(1+x^2)^{-1}} = \frac{1}{1+x^2}$

Hence the solution is

$$y \cdot \frac{1}{1+x^2} = \int (x^2+2) \cdot \frac{1}{1+x^2} dx$$

$$= \int \frac{(x^2+1)+1}{1+x^2} dx \quad = \int \left\{1 + \frac{1}{1+x^2}\right\} dx \quad .$$

$$= \int dx + \int \frac{1}{1+x^2} dx \quad = x + \tan^{-1}x + C$$

$\Rightarrow \quad y = (1+x^2)\,(x + \tan^{-1}x + c)$

Or, Here $P = \frac{1}{x}$ and $Q = e^x$

Now, $I.F. = e^{\int \frac{1}{x} dx} = e^{\log x} = x$

$\therefore$ solution is $y \cdot x = \int e^x \cdot x dx = \int x \cdot e^x dx = x \cdot e^x - \int 1 \cdot e^x dx$

Using integration by parts

$= xe^x - e^x + c = (x-1)x + c$

10. Let $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \log(1+\tan\theta) d\theta$

then $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \log\left\{1 + \tan\left(\frac{\pi}{4} - \theta\right)\right\} d\theta$

Since $\int_0^a f(x)dx = \int_0^a f(a-x)dx$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \log\left\{1 + \frac{\tan\frac{\pi}{4} - \tan\theta}{1 + \tan\frac{\pi}{4}\cdot\tan\theta}\right\} d\theta$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \log\left\{1 + \frac{1 - \tan\theta}{1 + \tan\theta}\right\} d\theta$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \log\left\{\frac{2}{1 + \tan\theta} d\theta\right\}$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left\{\log 2 - \log(1 + \tan\theta)\right\} d\theta$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\log 2) d\theta - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \log(1 + \tan\theta) d\theta$$

$$= \log 2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta - I$$

$$= 2I = (\log 2)[\theta]_0^{\frac{\pi}{4}} = \log 2 \cdot \frac{\pi}{4}$$

$$\Rightarrow \quad I = \frac{\pi}{8}\log 2$$

11. Equation of line Passes through the point $A\,(3,4,1)$ and $B(5,1,6)$ is vector equation of AB.

$$\vec{r} = 3\vec{i} + 4\vec{j} + \vec{k} + \lambda\left[(5-3)\vec{i} + (1-4)\vec{j} + (6-1)\vec{k}\right]$$

i.e. $$\vec{r} = 3\vec{i} + 4\vec{j} + \vec{k} + \lambda\left(2\vec{i} - 3\vec{j} + 5\vec{k}\right)$$

Let point P on AB line crosses xy-plane then vector situation of P is $x\vec{i} + y\vec{j}$

$\therefore$ Point $P\left(x\vec{i} + y\vec{j}\right)$ line on AB

$\therefore$ $$x\vec{i} + y\vec{j} = 3\vec{i} + 4\vec{j} + \vec{k} + \lambda\left(2\vec{i} - 3\vec{j} + 5\vec{k}\right)$$

$$x\vec{i} + y\vec{j} = (3 + 2\lambda)\vec{i} + (4 - 3\lambda)\vec{j} + (1 + 5\lambda)\vec{k}$$

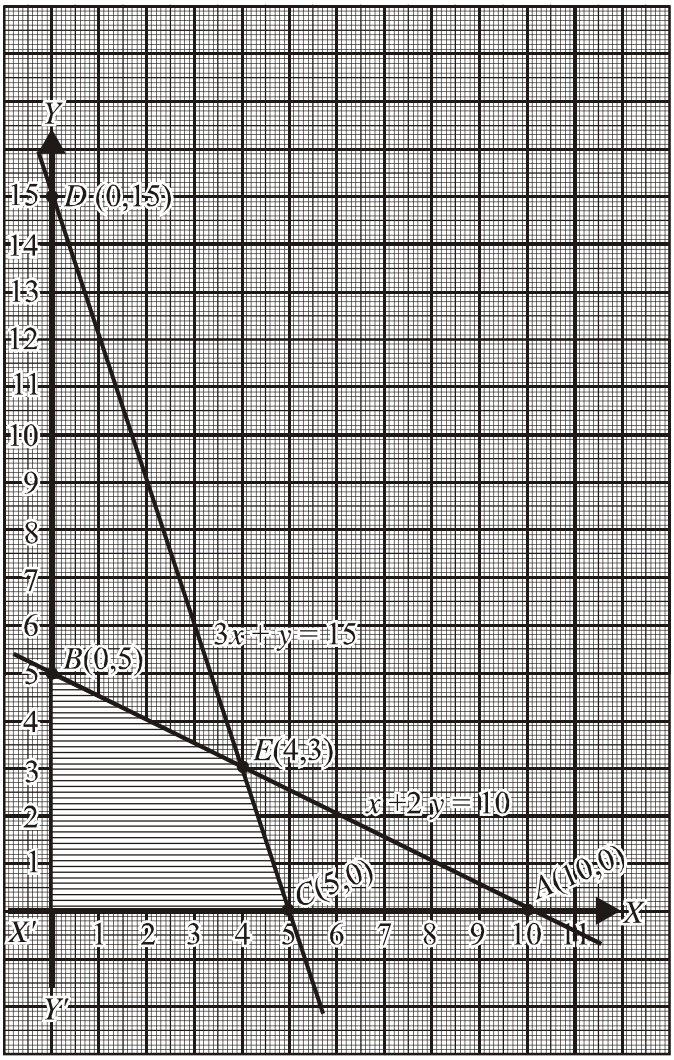
$\Rightarrow$ $x = 3 + 2\lambda,\ y = 4 - 3\lambda,\ 0 = 1 + 5\lambda$

$\lambda = -\frac{1}{5}$ and $x = 3 + 2\left(-\frac{1}{5}\right) = \frac{13}{5}$

$$y = 4 - 3\left(-\frac{1}{5}\right) = \frac{23}{5}$$

co-ordinate of the points is $\left(\frac{13}{5}, \frac{23}{5}, 0\right)$

12. First of all, We draw the graph of in equation and determine feasible region.



The shaded region in the figure above is the feasible region determine by the given system of in equations. We observe that the feasible region *OCEB* is bounded. So we use corner point method is bounded. So we use corner point method to determine the max. value of *z*. The co-rodinates of the corner points *O,C,E,B* are (0,0), (5,0), (4,3) and (0,5) respectively. Now we evaluate $z = 3x + 2y$ at each corner point.

Corner point	Corresponding value of $z = 3x + 2y$
(0,0)	0
(5,0)	15
(4,3)	18 Max.
(0,5)	10

Hence the max. value of *z* is 18 at the point (4,3).

SET-2

समय : 1 घंटा 10 मिनट | पूर्णांक : 40

Time : 1 Hours 10 Min. | **Full Marks : 40**

खण्ड – I (वस्तुनिष्ठ प्रश्न)

SECTION-I (OBJECTIVE TYPE QUESTIONS)

प्रश्न संख्या 1 से 40 तक निम्न में दिए गए चार विकल्पों में से एक ही उत्तर सही है। प्रत्येक प्रश्न के सही उत्तर को उत्तर तालिका में चिह्नित करें। **40 × 1 = 40**

From Question No. 1 to 40 there is one correct answer. In each question you have to mark that correct option from given options. **40 × 1 = 40**

1. यदि $A = \{1,2,3\}$ तथा R, A पर एक संबंध है ताकि $R = \{(2,2), (3,3), (2,3), (3,2), (3,1), (2,1)\}$ तो R है

What type of a relation is R, where $R = \{(2,2), (3,3), (2,3), (3,2), (3,1), (2,1)\}$.

(A) स्वतुल्य (reflexive)(B) सममित (symmetric)(C) तुल्यता (equivalance) (D) संक्रामक (transetive)

2. यदि $A = \{a,b,c\}$, $B = \{1,2,3\}$ तथा $f = \{(a, 1), (b, 2), (c,2)\}$ तो f हैं।

If $A = \{a,b,c\}$, $B = \{1,2,3\}$, $f = \{(a, 1), (b, 2), (c,2)\}$ then what type of a function is f ?

(A) एकैकि अनाच्छादक (one-one onto) (B) बहु-एक अनाच्छादक (many-one into)

(C) बहु-एक अनाच्छादक (many-one onto) (D) एकैकि अनाच्छादक (one-one onto)

3. $F : A \to B$ एक अनाच्छादक फलन है यदि

$F : A \to B$ will be an into function, if

(A) $f(A) \subset B$ (B) $f(A) = B$ (C) $BC + (A)$ (D) $F(B) \subset A$

4. यदि $A = \{1,2\}$ समुच्चय A पर कितने दिआधारी संक्रियाएँ परिभाषित होगी?

Let $A = \{1,2\}$ how many binary operations can be defined on this set ?

(A) 8 (B) 10 (C) 16 (D) 20

5. यदि $A = \{1,2,3\}$ तो समुच्चय A पर कितने तुल्यता संबंध परिभाषित होगी?

Let $A = \{1,2,3\}$. How many equivalence relations can be defined on A containing (1,2) ?

(A) 3 (B) 1 (C) 2 (D) 4

6. यदि $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=0$ तो सारणिक $\begin{vmatrix} 1+a & 1 & 1 \\ 1 & 1+a & 1 \\ 1 & 1 & 1+a \end{vmatrix}$ = का मान होगा

If $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=0$ then $\begin{vmatrix} 1+a & 1 & 1 \\ 1 & 1+a & 1 \\ 1 & 1 & 1+a \end{vmatrix}$ =

(A) 0 (B) abc (C) $-abc$ (D) $a + b + c$

7. प्रथम 6 धनात्मक पूर्णांक को लेते हुए असमान अवयव रखने वाले कितने भिन्न आव्यूह बनाये जा सकते है?

How many different matrices of unequal elements can be made by having the first 6 positive integers as elements ?

(A) 1880 (B) 1440 (C) 720 (D) 4

8. यदि A एक 2×2 व्युत्क्रमणीय आव्यूह है तो $|adj\ A| =$

Let A be a non-singular matrix of the order 2×2 then $|adj\ A| =$

(A) $2|A|$ (B) $|A|$ (C) $|A|^2$ (D) $|A|^3$

9. यदि A, B और C क्रमशः $2 \times 3, 4 \times 3$ तथा 2×4 क्रम के आव्यूह है तो इनमें से किसका गुणनफल निकाला जा सकता है?

If A, B and C are matrices of order 2×3, 4×3 and 2×4 respectively then which of the products can be obtained ?

(A) AB (B) BA (C) CA (D) CB

10. 0 और 1 का प्रयोग करके 3×3 क्रम के कितने भिन्न-भिन्न आव्यूह बनाये जा सकते हैं?

How many different matrices of order 3×3 can be made with 0 and 1 ?

(A) 18 (B) 81 (C) 512 (D) 27

11. यदि $y = \log \sin x^2$, $x = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$ पर $\frac{dy}{dx}$ का मान होगा।

If $y = \log \sin x^2$, $\frac{dy}{dx}$ at $x = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$ equals

(A) 0 (B) 1 (C) $\frac{\pi}{4}$ (D) $\sqrt{\pi}$

12. यदि $f(x) = \sqrt{3}\sin x + \cos x$ का अधिकतम मान x के किस मान पर प्राप्त होगा।

The maximum value of $f(x) = \sqrt{3}\sin x + \cos x$ is at what value of x

(A) $\frac{\pi}{6}$ (B) $\frac{\pi}{2}$ (C) $\frac{\pi}{3}$ (D) $\frac{\pi}{4}$

13. यदि $y = x^2 \cdot e^{-x}$ तो वह अंतराल, जिसमें y,x के सापेक्ष बढ़ता है, होगा।

Let $y = x^2 \cdot e^{-x}$ then the interval in which y increases with respect to x is

(A) $(-\infty, \infty)$ (B) $(-2, 0)$ (C) $(2,\infty)$ (D) $(0,2)$

14. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\sqrt{\tan x} + \sqrt{\cot x}\right) dx =$

(A) $\frac{\pi}{\sqrt{2}}$ (B) $\frac{\pi}{2\sqrt{2}}$ (C) $\frac{\pi}{4\sqrt{2}}$ (D) None

15. यदि $a > 0$ तो $\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos^2 x}{1+a^x} dx$ का मान है

If $a > 0$ then $\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos^2 x}{1+a^x} dx$

(A) π (B) $a\pi$ (C) $\frac{\pi}{2}$ (D) 2π

16. $\int_1^5 \frac{x^2}{x^2-4}dx =$

(A) $2-\log e^{\frac{15}{7}}$ (B) $2+\log e^{\frac{15}{7}}$ (C) $2+\log e^3+4\log e^5$ (D) None

17. $\int_0^1 \tan^{-1}\left(1-x+x^2\right)dx =$

(A) $\log 2$ (B) $\log\frac{1}{2}$ (C) $\pi \log 2$ (D) $\frac{\pi}{2}\log\frac{1}{2}$

18. अवकल समीकरण $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - x\frac{dy}{dx}+y=0$ का एक हल है।

A solution of the differential equation $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - x\frac{dy}{dx}+y=0$ is

(A) $y=2$ (B) $y=2x$ (C) $y=2x-4$ (D) $y=2x^2-4$

19. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1+\tan^3 x} =$

(A) 0 (B) 1 (C) $\frac{\pi}{2}$ (D) $\frac{\pi}{4}$

20. वक्र $y^2=2c\left(x+\sqrt{c}\right)$ जहाँ c स्वैच्छिक नियतांक है, को निरूपित करने वाला अवकल समीकरण होगा।

The differential equation representing the family of curves $y^2=2c\left(x+\sqrt{c}\right)$ where c is a positive.

(A) 1 कोटि का (Order 1) (B) 2 कोटि का (order 2)

(C) 3 कोटि का (order 3) (D) None

21. यदि $\vec{a}=2\vec{i}-5\vec{j}+\vec{k}$ तथा $\vec{b}=\vec{i}+2\vec{j}-\vec{k}$ तो

If $\vec{a}=2\vec{i}-5\vec{j}+\vec{k}$ and $\vec{b}=\vec{i}+2\vec{j}-\vec{k}$ then

(A) $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$ (B) $\vec{a}\cdot\vec{b}\neq 0$ (C) $\vec{a}\cdot\vec{b}=-9$ (D) $\vec{a}\perp\vec{b}$

22. यदि $2\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}, 6\vec{i}-\vec{j}+2\vec{k}$ और $14\vec{i}-5\vec{j}+4\vec{k}$ क्रमशः बिन्दुओं A,B तथा C के स्थिति सदिश है तो

If $2\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}, 6\vec{i}-\vec{j}+2\vec{k}$ and $14\vec{i}-5\vec{j}+4\vec{k}$ be the position vector of the points A, B and C respectively, then

(A) A, B और C सरेखी है (A, B and C are collinear)

(B) A, B और C असरेखी है (A, B and C are not collinear)

(C) $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{BC}$

(D) कोई नहीं (None of these)

23. यदि एक समतल का समीकरण $2x + 5y - 6z + 3 = 0$ है तो इस समतल के समांतर किसी समतल का समीकरण होगा।

If $2x + 5y - 6z + 3 = 0$ be the equation of the plane then the equation of any parallel to the given plane is

(A) $3x + 5y - 6z + 3 = 0$ (B) $2x - 5y - 6z + 3 = 0$

(C) $2x + 5y - 6z + k = 0$ (D) None of these

24. यदि $y = \sec(\tan^{-1}x)$, तो $\frac{dy}{dx}$ का मान है

If $y = \sec(\tan^{-1}x)$ then $\frac{dy}{dx}$

(A) $\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ (B) $\frac{-x}{\sqrt{1+x^2}}$ (C) $\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ (D) None of these

25. यदि $y = \sec^{-1}\left[\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}\right] + \sin^{-1}\left[\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}\right]$ तो $\frac{dy}{dx}$ का मान है

If $y = \sec^{-1}\left[\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}\right] + \sin^{-1}\left[\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}\right]$ then $\frac{dy}{dx}$ equal to

(A) 1 (B) π (C) $\frac{\pi}{2}$ (D) 0

26. दो पासों के साथ एक द्विक प्राप्त करने की संभावना है।

The chance of getting a doublet with 2 dice is

(A) $\frac{2}{3}$ (B) $\frac{1}{6}$ (C) $\frac{5}{6}$ (D) $\frac{5}{36}$

27. यदि $y = x^2 + 3x + 4$ तो वक्र के बिन्दु (1,1) पर अभिलंब की प्रवणता है।

If $y = x^2 + 3x + 4$, then the slope of the normal to the given curve at (1,1) is

(A) 5 (B) $-\frac{1}{5}$ (C) 8 (D) None of these

28. $\frac{d(k)}{dx} =$ जहाँ k एक नियतांक है (Where k is a constant)

(A) 0 (B) k (C) 1 (D) None of these

29. $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^9 x dx$ बराबर है (equals)

(A) –1 (B) 0 (C) 1 (D) None of these

30. अवकल समीकरण $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^3 + 2\left(\frac{dy}{dx}\right)^4 + 9y = \sin x$ की कोटि है

The order of differential equation $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^3 + 2\left(\frac{dy}{dx}\right)^4 + 9y = \sin x$ is

(A) 3 (B) 4 (C) 2 (D) None of these

31. $x\frac{dy}{dx} - y = x^2$ का हल है

The solution of $x\frac{dy}{dx} - y = x^2$ is

(A) $y = x + k$ (B) $y^2 = x + k$ (C) $y = x^2 + kx$ (D) $y^2 = x^2 - kx$

32. मूल बिन्दु से गुजरने वाली रेखाओं के परिवार का अवकल समीकरण होगा

The differential equation of family of lines passing through the origin is

(A) $x\frac{dy}{dx} = y$ (B) $y\frac{dy}{dx} = x$ (C) $\frac{dy}{dx} = y$ (D) $\frac{dy}{dx} = x$

33. यदि A और B दो घटना इस प्रकार है कि $P(A) = \frac{1}{3}, P(B) = \frac{1}{4}$ और $P(A \cap B) = \frac{1}{5}$ तो $P\left(\frac{A}{B}\right)$ है।

Let A and B be two events such that $P(A) = \frac{1}{3}, P(B) = \frac{1}{4}$ and $P(A \cap B) = \frac{1}{5}$ then $P\left(\frac{A}{B}\right)$

(A) $\frac{1}{5}$ (B) $\frac{2}{5}$ (C) $\frac{3}{5}$ (D) $\frac{4}{5}$

34. $\int \log_c x dx$

(A) $x\log x + x + c$ (B) $x\log x - x + c$ (C) $\log x + x + c$ (D) $\log x - x + c$

35. यदि A तथा B दो घटनाएँ है ताकि $P(A) = 0.2, P(B) = 0.6$ तब $P(A \cup B) + P(A \cap B)$

If A and B are any two events such that $P(A) = 0.2, P(B) = 0.6$, then $P(A \cup B) + P(A \cap B)$

(A) 0.9 (B) 0.7 (C) 0.8 (D) None of these

36. फलन $f(x) = \sqrt{\sin^{-1} x}$ का प्रांत है

Domain of function $f(x) = \sqrt{\sin^{-1} x}$

(A) [0,1] (B) [–1,1] (C) [–1,0] (D) {0,1}

37. $\int_{-1}^{1} |x| dx$

(A) $\frac{1}{2}$ (B) 1 (C) 2 (D) None of these

38. बिन्दु जहाँ पर सरल रेखा $y = x + 1$ वक्र $y^2 = 4x$ पर स्पर्श रेखा है, होगा।

The line $y = x + 1$ is tangent to the curve $y^2 = 4x$ at the point.

(A) (2, 1) (B) (1, 2) (C) (–1, 2) (D) (1, –2)

39. $\cos^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) + 2\sin^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$ बराबर है।

$\cos^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) + 2\sin^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$ equals

(A) $\frac{2\pi}{3}$ (B) $\frac{\pi}{2}$ (C) $\frac{4\pi}{3}$ (D) None of these

40. $\text{cosec}^{-1}(-2)$ का मुख्य मान है।

The principal value of $\text{cosec}^{-1}(-2)$ is

(A) $-\frac{2\pi}{3}$ (B) $\frac{\pi}{6}$ (C) $2\frac{\pi}{3}$ (D) $\frac{-\pi}{6}$

ANSWERS

1.	(B)	**2.**	(B)	**3.**	(A)	**4.**	(C)	**5.**	(C)	**6.**	(B)	**7.**	(A)	**8.**	(B)	**9.**	(D)	**10.**	(C)
11.	(D)	**12.**	(C)	**13.**	(D)	**14.**	(C)	**15.**	(C)	**16.**	(B)	**17.**	(C)	**18.**	(C)	**19.**	(D)	**20.**	(A)
21.	(C)	**22.**	(A)	**23.**	(C)	**24.**	(A)	**25.**	(D)	**26.**	(B)	**27.**	(B)	**28.**	(A)	**29.**	(B)	**30.**	(C)
31.	(C)	**32.**	(A)	**33.**	(D)	**34.**	(B)	**35.**	(C)	**36.**	(A)	**37.**	(B)	**38.**	(B)	**39.**	(A)	**40.**	(D)

खण्ड – II (गैर – वस्तुनिष्ठ प्रश्न)

SECTION-II (NON-OBJECTIVE TYPE QUESTIONS)

समय : 2 घंटा 05 मिनट **पूर्णांक : 60**
Time : 2 Hours 05 Min. **Full Marks : 60**

लघु उत्तरीय प्रश्न
(Short Answer Type Question)

प्रश्न संख्या 1 से 8 तक लघु उत्तरीय प्रकार के हैं। प्रत्येक के लिए 4 अंक निर्धारित है। **8 × 4 = 32**
Question Nos. 1 to 8 are of short answer type. Each question carries 4 marks. **8 × 4 = 32**

1. सिद्ध करें कि $\sin^{-1}\frac{4}{5}+\sin^{-1}\frac{5}{13}+\sin^{-1}\frac{16}{65}=\frac{\pi}{2}$

Prove that $\sin^{-1}\frac{4}{5}+\sin^{-1}\frac{5}{13}+\sin^{-1}\frac{16}{65}=\frac{\pi}{2}$

2. यदि $A=\begin{bmatrix}1 & 0\\ -1 & 7\end{bmatrix}$ और $I=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$ तो k का मान निकालें जबकि $A^2=8A+KI$

If $A=\begin{bmatrix}1 & 0\\ -1 & 7\end{bmatrix}$ and $I=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$ then find k so tha $A^2=8A+kI$

3. मान निकालें (Evaluate) : $\begin{vmatrix}\cos\alpha\cos\beta & \cos\alpha\sin\beta & -\sin\alpha\\ -\sin\beta & \cos\beta & 0\\ \sin\alpha\cos\beta & \sin\alpha\sin\beta & \cos\alpha\end{vmatrix}$

4. समीकरण को हल करें (Solve the equation)

$2\tan^{-1}(\cos x)=\tan^{-1}(2\cos x)$

5. जब $x\cos y=\sin(x+y)$ तो $\frac{dy}{dx}$ का मान निकालें।

Find $\frac{dy}{dx}$ when $x\cos y=\sin(x+y)$

6. समाकलन करें (Integrate) : $\int e^x\cos\left(e^x\right)dx$

7. यदि $\vec{a}=\vec{i}-7\vec{j}+7\vec{k}$ तथा $\vec{b}=3\vec{i}-2\vec{j}+2\vec{k}$ तब $\vec{a}\times\vec{b}$ ज्ञात करें।

Find the magnitude of the vector $\vec{a}\times\vec{b}$ if $\vec{a}=\vec{i}-7\vec{j}+7\vec{k}$ and $\vec{b}=3\vec{i}-2\vec{j}+2\vec{k}$

8. दो पासे फेंकने के क्रम में ऊपर आए अंकों का योग 8 होने की क्या प्रायिकता है, यदि मालूम हो कि दूसरे पासे पर हमेशा 4 आता है?

Two dice are thrown. Find the probability that the numbers appeared has a sum 8 if it is known that the second dice always exhibits 4.

दीर्घ उत्तरीय प्रश्न
(Long Answer Type Question)

प्रश्न संख्या 9 से 12 तक दीर्घ उत्तरीय प्रकार के हैं। प्रत्येक के लिए 7 अंक निर्धारित है। **4 × 7 = 28**

Question Nos. 9 to 12 are of short answer type. Each question carries 7 marks. **4 × 7 = 28**

9. हल करें (Solve) : $\left(1+x^2\right)\frac{dy}{dx}-2xy=\left(x^2+2\right)\left(x^2+1\right)$

10. सिद्ध करें कि (Prove that) : $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\log\sin x dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\log\cos x dx=-\frac{\pi}{2}\log 2$

11. यदि सरल रेखा $\frac{x-1}{k}=\frac{y-2}{2}=\frac{z-3}{3}$ तथा $\frac{x-2}{3}=\frac{y-3}{k}=\frac{z-1}{2}$ एक दूसरे को प्रतिछेद करती है तो k का मान क्या होगा?

If the straight line $\frac{x-1}{k}=\frac{y-2}{2}=\frac{z-3}{3}$ and $\frac{x-2}{3}=\frac{y-3}{k}=\frac{z-1}{2}$ intersects at a point, then find the value of integer k.

12. न्यूनतमीकरण करें $Z=-3x+4y$

जबकि $x+2y\le 8$

$3x+2y\le 12$

$x\ge 0, y\ge 0$

Maximise $Z=-3x+4y$

Subject to $x+2y\le 8$

$3x+2y\le 12$

$x\ge 0, y\ge 0$

ANSWERS

1. Let $\sin^{-1}\frac{4}{5}=\theta, \sin^{-1}\frac{5}{13}=\phi$ and $\sin^{-1}\frac{16}{65}=\psi$

$\therefore \quad \sin\theta=\frac{4}{5}$

$\sin\phi=\frac{5}{13}$

and $\sin\psi=\frac{16}{65}$

Hence $\cos\theta=\frac{3}{5}, \cos\phi=\frac{12}{13}$ and $\cos\psi=\frac{63}{65}$

Now $\sin(\theta+\phi) = \sin\theta\cdot\cos\phi + \cos\theta\cdot\sin\phi$

$$= \frac{4}{5}\cdot\frac{12}{13} + \frac{3}{5}\cdot\frac{5}{13} = \frac{63}{65} = \cos\psi = \sin\left(\frac{\pi}{2}-\psi\right)$$

$$\therefore \quad \theta+\phi = \frac{\pi}{2}-\psi$$

$$\therefore \quad \boxed{\theta+\phi+\psi = \frac{\pi}{2}}$$

Hence the result

2. We have $A^2 = A\cdot A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 7 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+0 & 0+0 \\ -1-7 & 0+49 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -8 & 49 \end{bmatrix}$

$$\therefore \quad A^2 - 8A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -8 & 49 \end{bmatrix} - 8\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -8 & 49 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -8 & 0 \\ 8 & -56 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1-8 & 0+0 \\ -8+8 & 49-56 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -7 & 0 \\ 0 & -7 \end{bmatrix} = -7\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = -7I$$

Hence on comparison $R = -7$

3. Expanding along the first row, we get

$\Delta = \cos\alpha\cos\beta(\cos\beta\cos\alpha - 0) - \cos\alpha\sin\beta(-\sin\beta\cos\alpha) - \sin\alpha(-\sin\alpha\sin^2\beta - \sin\alpha\cos^2\beta)$

$= \cos^2\alpha\cos^2\beta + \cos^2\alpha\sin^2\beta + \sin^2\alpha\sin^2\beta + \sin^2\alpha\cos^2\beta$

$= \cos^2\alpha(\cos^2\beta + \sin^2\beta) + \sin^2\alpha(\sin^2\beta + \cos^2\beta)$

$= \cos^2\alpha\cdot 1 + \sin^2\alpha\cdot 1 = 1$

4. From the given equation

$$\tan^{-1}\frac{2\cos x}{1-\cos^2 x} = \tan^{-1}(2\cos x) \text{ where } \cos^2 x < 1$$

$$\Rightarrow \quad \tan^{-1}\frac{2\cos x}{\sin^2 x} = \tan^{-1}(2\cos x)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{2\cos x}{\sin^2 x} = 2\cos x$$

$\Rightarrow \quad 2\cos x = 2\cos x\cdot\sin^2 x$

$\Rightarrow \quad 2\cos x[1-\sin^2 x] = 0$

$\Rightarrow \quad \cos x\cdot\cos^2 x = 0$

$\Rightarrow \quad \cos^3 x = 0$

$\cos x = 0$

$\Rightarrow \quad \boxed{2n\pi \pm \frac{\pi}{2}}$

5. Differentiating both sides w.r.t. x, we get

$$x \cdot (-\sin y)\frac{dy}{dx} + \cos y \cdot 1 = \cos(x+y)\left[1 + \frac{dy}{dx}\right]$$

$$\Rightarrow \quad -x \sin y \frac{dy}{dx} + \cos y = \cos(x+y) + \cos(x+y) \cdot \frac{dy}{dx}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dy}{dx}\left[\cos(x+y) + x \sin y\right] = \cos y - \cos(x+y)$$

$$\boxed{\therefore \quad \frac{dy}{dx} = \frac{\cos y - \cos(x+y)}{\cos(x+y) + x \sin y}}$$

6. Let $e^x = z$

$\therefore \quad e^x dx = dz$

$\therefore \quad I = \int e^x \cos\left(e^x\right) dx = \int \cos\left(e^x\right) e^x dx = \int \cos z dz = \sin z = \sin\left(e^x\right) + C$

7. We have

$$\therefore \quad \vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -7 & 7 \\ 3 & -2 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= \vec{i}(-14+14) - \vec{j}(2-21) + \vec{k}(-2+21)$$

$$= \vec{i}(0) - \vec{j}(-19) + \vec{k}(19)$$

$$= \boxed{19\vec{j} + 19\vec{k}}$$

$$\therefore \quad \left|\vec{a} \times \vec{b}\right| = \sqrt{0^2 + 19^2 + 19^2} = \sqrt{19^2 \times 2} = 19\sqrt{2}$$

8. Let A = Event of always 4 exhibits on second dice

= {(1,4), (2,4), (3,4), (4,4), (5,4), (6,4)}

$n(A) = 6$

and B = Event of the numbers appeared has a sum 8.

B = {(4,4)}

$\therefore \quad A \cap B = A \cap \{(4,4)\} = \{(4,4)\}$

$n(A \cap B) = 1$

$$\boxed{P\left(\frac{B}{A}\right) = \frac{P(A \cap B)}{n(A)} = \frac{1}{6}}$$

9. From the given equation, we have

$$\frac{dy}{dx} - \frac{2x}{1+x^2}y = x^2 + 2$$

Here $I.F. = {}_{e^-}\int \frac{2x}{1+x^2}dx = e^{-\log(1+x^2)} = e^{\log\left(1+x^2\right)^{-1}} = \frac{1}{1+x^2}$

Hence the solution is

$$y \cdot \frac{1}{1+x^2} = \int \left(x^2+2\right) \cdot \frac{1}{1+x^2}dx$$

$$= \int \frac{\left(x^2+1\right)+1}{1+x^2}dx$$

$$= \int \left\{1 + \frac{1}{1+x^2}\right\}dx$$

$$= \int dx + \int \frac{1}{1+x^2}dx$$

$$= x + \tan^{-1}x + C$$

$\Rightarrow \quad y = (1+x^2)\,(x + \tan^{-1}x + c)$

10. Let $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log\sin x dx$ …(i)

then $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)dx$

Since $\int_0^a f(x)dx = \int_0^a f(a-x)dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log\cos x dx$ …(ii)

(i) + (ii)

$$2I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\log\sin x + \log\cos x\right)dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log\left(\sin x\cos x\right)dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log\frac{\sin 2x}{2}dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left\{\log\sin 2x - \log 2\right\}dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log\sin 2x dx - (\log 2)\int_0^{\frac{\pi}{2}} dx$$

$$= z, -\frac{\pi}{2}\log 2$$ …(iii)

Now we evaluate,

$$I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log\sin 2x dx$$

For this, let $2x = t$ so that $2dx = dt$

Also ($x = 0 \Rightarrow t = 0$) and $\left(x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow t = \pi \right)$

$$\Rightarrow \quad I_1 = \int_0^{\pi} \log\sin t \cdot \frac{dt}{2} = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \log\sin t dt$$

Here $\log\sin\left(2 \cdot \frac{\pi}{2} - t\right) = \log\sin t$

$$\therefore \quad I_1 = \frac{1}{2} \cdot 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log\sin t dt$$

for if $f(2a - x) = f(x)$, then

$$\int_0^{2a} f(x)\,dx = 2\int_0^{a} f(x)\,dx$$

Hence $I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log\sin t dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log\sin x dx = I$

$\therefore$ From (i),

$$2I = I - \frac{\pi}{2}\log 2$$

$$\Rightarrow \quad I = -\frac{\pi}{2}\log 2$$

Hence the result.

11. माना कि $\frac{x-1}{k} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-3}{3} = \lambda$ है, तो इस प्रकार के व्यापक बिन्दु के निर्देशांक $(1 + k\lambda, 2 + 2\lambda, 3 + 3\lambda)$ है। फिर यदि $\frac{x-2}{3} = \frac{y-3}{k} = \frac{z-1}{2} = \mu$ लें, तो इस पर के व्यापक बिन्दु के निर्देशांक $(2 + 3\mu, 3 + k\mu, 1 + 2\mu)$ है। यदि ये रेखाएँ छेदन करती हैं तो एक बिन्दु उभयनिष्ठ होगा तथा उस स्थिति में दोनों रेखा पर के व्यापक बिन्दु के निर्देशांक समान होगें।

i.e. $1 + k\lambda = 2 + 3\mu, 2 + 2\lambda = 3 + k\mu, 3 + 3\lambda = 1 + 2\mu$

$\Rightarrow$ $k\lambda - 3\mu - 1 = 0, 2\lambda - k\mu - 1 = 0, 3\lambda - 2\mu + 2 = 0$

प्रथम दो परिणाम से हम पाते हैं कि

$$\frac{\lambda}{3-k} = \frac{\mu}{-2+k} = \frac{1}{-k^2+6}$$

$$\Rightarrow \quad \lambda = \frac{3-k}{6-k^2}; \mu = \frac{k-2}{6-k^2}$$

ये मान तीसरे परिणाम में रखने पर,

$$3\left(\frac{3-k}{6-k^2}\right)-2\left(\frac{k-2}{6-k^2}\right)+2=0$$

$\Rightarrow \quad 9-3k-2k+4+12-2k^2=0$

$\Rightarrow \quad 2k^2+5k-25=0$

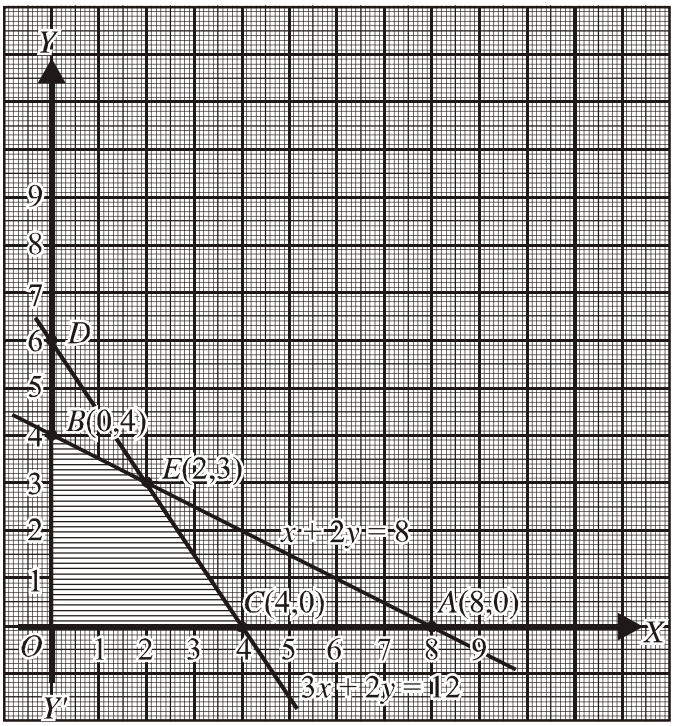
$\Rightarrow \quad 2k(k+5)-5(k+5)=0$

$\Rightarrow \quad (2k-5)(k+5)=0$

$\Rightarrow \quad k=\frac{5}{2}, k=-5$

परंतु $\frac{5}{2}$ पूर्णांक नहीं है, इसलिए यहाँ $k=-5$(पूर्णांक)

12. First of all, let us graph the feasible region of the system of in equations.



The shaded region in the figure above is the feasible region determined by the given system of constraints.

We observe that the feasible region *OCES* is bounded. So we use corner point method to determine the minimum value of z.

The co-ordinates of the corner points O,C,E,B are (0,0), (4,0), (2,3) and (0,4) respectively.
Now we evaluate $z = -3x + 4y$ at reach corner point.

Corner point	Corresponding value of $z = -3x + 4y$
(0,0)	0
(4,0)	–12 Min
(2,3)	6
(0,4)	8

Hence min. value of z is –12 at the point (–4,0).

SET-3

समय : 1 घंटा 10 मिनट | पूर्णांक : 40

Time : 1 Hours 10 Min. | **Full Marks : 40**

खण्ड – I (वस्तुनिष्ठ प्रश्न)

SECTION-I (OBJECTIVE TYPE QUESTIONS)

प्रश्न संख्या 1 से 40 तक निम्न में दिए गए चार विकल्पों में से एक ही उत्तर सही है। प्रत्येक प्रश्न के सही उत्तर को उत्तर तालिका में चिह्नित करें। **40 × 1 = 40**

From Question No. 1 to 40 there is one correct answer. In each question you have to mark that correct option from given options. **40 × 1 = 40**

1. मूल बिन्दु से तल $2x - 3y + 6z + 14 = 0$ की दूरी निम्न में से किसके बराबर है।

The distance of plane $2x - 3y + 6z + 14 = 0$ from orgin is equal to which of the following.

(A) 2 (B) 4 (C) 7 (D) 11

2. तल $2x + 3y - z = 5$ पर लम्बवत् और $(1,1,1)$ से गुजरनेवाली रेखा का समीकरण निम्न में से कौन है?

The equation of line through $(1,1,1)$ and perpendicular to the plane $2x + 3y - z = 5$ is which of the following

(A) $\frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{3} = z-1$ (B) $\frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{3} = \frac{z-1}{-1}$

(C) $\frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{3} = \frac{z-1}{5}$ (D) $\frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{-3} = z-1$

3. जब एक जोड़े पासे को उछाला जाता है, तो प्रत्येक पासे पर सम रूढ़ संख्या आने की प्रायिकता निम्न में से कौन है?

The probability of obtaining an even prime number on each die, when a pair of dice is rolled is equal to which of the following ?

(A) 0 (B) $\frac{1}{3}$ (C) $\frac{1}{12}$ (D) $\frac{1}{36}$

4. यदि A और B दो घटना इस प्रकार है कि $P(A) \neq 0$ और $P\left(\frac{B}{A}\right) = 1$ तो निम्न में कौन सही है?

If A and B are two events such that $P(A) \neq 0$ and $P\left(\frac{B}{A}\right) = 1$ then which of the following is correct ?

(A) $A \subset B$ (B) $B \subset A$ (C) $B = \phi$ (D) $A = \phi$

5. $2\hat{i} - 3\hat{j} + 6\hat{k}$ पर $\hat{i} + 3\hat{j} + \hat{k}$ का प्रक्षेप निम्न में से कौन होगा?

The projection of $\hat{i} + 3\hat{j} + \hat{k}$ on $2\hat{i} - 3\hat{j} + 6\hat{k}$ is equal to which of the following ?

(A) $\frac{1}{7}$ (B) $-\frac{1}{7}$ (C) 7 (D) –7

6. यदि $\vec{a} \times \vec{b} = 0$ और $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ तो निम्न में से कौन सही है?

If $\vec{a} \times \vec{b} = 0$ and $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ then which of the following is true ?

(A) $\vec{a} \perp \vec{b}$ (B) $\vec{a} \parallel \vec{b}$ (C) $\vec{a} = 0$ and $\vec{b} = 0$ (D) $\vec{a} = 0$ or $\vec{b} = 0$

7. $\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx$ निम्न मे से किसके बराबर है।

$\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx$ is equal to which of the following ?

(A) $e^{\sqrt{x}}$ (B) $\frac{e^{\sqrt{x}}}{2}$ (C) $2 \cdot e^{\sqrt{x}}$ (D) $\sqrt{x} \cdot e^{\sqrt{x}}$

8. $\int_1^{\sqrt{3}} \frac{1}{1+x^2} dx$ निम्न में से किसके बराबर है?

$\int_1^{\sqrt{3}} \frac{1}{1+x^2} dx$ is equal to which of the following ?

(A) $\frac{\pi}{3}$ (B) $\frac{\pi}{4}$ (C) $\frac{\pi}{6}$ (D) $\frac{\pi}{12}$

9. $\sin^{-1} \frac{1}{\sqrt{2}}$ का मुख्य मान निम्न में से कौन है?

Principal value of $\sin^{-1} \frac{1}{\sqrt{2}}$ is equal to which of the following ?

(A) $\frac{\pi}{4}$ (B) $\frac{3\pi}{4}$ (C) $\frac{5\pi}{4}$ (D) None of these

10. K एक अदिश है और A एक n-वर्ग आव्यूह है तो $|kA|$ निम्न में से किसके बराबर है?

K is a scalar and A is a n-square matrix, then which of the following is true ?

(A) $k\,|A|^n$ (B) $k\,|A|$ (C) $k^n\,|A|^n$ (D) $k^n|A|$

11. यदि A और B एक ही क्रम के सममित आव्यूह है, तो $(AB - BA)$ निम्न में से कौन है?

If A, B are symmetric matrices of same order then $AB - BA$ is which of the following ?

(A) skew-symmetric matrix (B) symmetric matrix

(C) zero matrix (D) identity matrix

12. $\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ 1 & y & y^2 \\ 1 & z & z^2 \end{vmatrix}$ का मान निम्न में से किसके बराबर है?

The value of $\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ 1 & y & y^2 \\ 1 & z & z^2 \end{vmatrix}$ is equal to which of the following ?

(A) 0 (B) $(x-y)\,(y-z)\,(z-x)$ (C) $(y-x)\,(y-z)(z-x)$ (D) None of these

13. यदि $y = \log\{\log(\log x)\}$, तो $\frac{dy}{dx}$ निम्न में से किसके बराबर है?

If $y = \log\{\log(\log x)\}$, then $\frac{dy}{dx}$ is equal to which of the following ?

(A) $\frac{1}{\log(\log x)}$ (B) $\frac{1}{x\log x \cdot \log(\log x)}$ (C) $\frac{1}{x\log(\log x)}$ (D) None of these

14. यदि $y = a^x$, तो $\frac{d^2y}{dx^2}$ निम्न से किसके बराबर है?

If $y = a^x$, then $\frac{d^2y}{dx^2}$ is equal to which of the following ?

(A) $a^x \log a$ (B) $a^x(\log a)^2$ (C) $(a^x)^2 \cdot \log a$ (D) None of these

15. फलन $f(x) = 2 + 4x^2 + 6x^4 + 8x^6$ के लिए निम्न में कौन सही है?

For the function $f(x) = 2 + 4x^2 + 6x^4 + 8x^6$ which of the following is correct ?

(A) only one maximum value (B) only one minimum value

(C) No maxima and Minima (D) None of these

16. अवकल समीकरण $\frac{d^2y}{dx^2} = \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$ की कोटि (श्रेणी) निम्न में कौन है?

The order of the differential equation $\frac{d^2y}{dx^2} = \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$ is which of the following ?

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) None of these

17. अवकल समीकरण $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}$ का सामान्य हल निम्न में से कौन है?

The general solution of the differential equation $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}$ is which of the following ?

(A) $y = \frac{k}{x}$ (B) $y = kx$ (C) $y = k\log x$ (D) $\log y = kx$

18. y-अक्ष की दिक् कोज्याएँ होती है निम्न में से कौन है?

The direction cosine of y-axis are which of the following

(A) (0,1,0) (B) (0,0,1) (C) (1,0,0) (D) (0,0,0)

19. बिंदु (1, –1,1) और (–1,1,1) को मिलाने वाली रेखा का दिक् कोज्याएँ है निम्न में से कौन है?

The direction cosine of the line joining (1, –1,1) and (–1,1,1) are which of the following ?

(A) (2, –2,0) (B) (1,–1,0) (C) $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{2}}, 0\right)$ (D) None of these

20. xy-तल का समीकरण निम्न में से कौन है?

The equation of xy-plane is which of the following ?

(A) $x = 0$ (B) $y = 0$ (C) $z = 0$ (D) $xy = 0$

21. यदि $\vec{a} = 2\hat{i} - 3\hat{j} - \hat{k}$ और $\vec{b} = \hat{i} + 4\hat{j} - 2\hat{k}$, तो $\vec{a} \times \vec{b}$ निम्न में से किसके बराबर है?

If $\vec{a} = 2\hat{i} - 3\hat{j} - \hat{k}$ and $\vec{b} = \hat{i} + 4\hat{j} - 2\hat{k}$ then $\vec{a} \times \vec{b}$ is equal to which of the following ?

(A) $10\hat{i} + 2\hat{j} + 11\hat{k}$ (B) $10\hat{i} + 3\hat{j} + 11\hat{k}$ (C) $10\hat{i} - 3\hat{j} + 11\hat{k}$ (D) $10\hat{i} - 3\hat{j} - 11\hat{k}$

22. $\left(\vec{a} \times \vec{b}\right)^2$ निम्न में से किसके बराबर है।

$\left(\vec{a} \times \vec{b}\right)^2$ is equal to which of the following ?

(A) $a^2 + b^2 - \left(\vec{a} \cdot \vec{b}\right)$ (B) $\vec{a}^2 \vec{b}^2 - \left(\vec{a} \cdot \vec{b}\right)^2$ (C) $\vec{a}^2 \vec{b}^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b}$ (D) $\vec{a}^2 \vec{b}^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b}$

23. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{\cot x}}{\sqrt{\tan x} + \sqrt{\cot x}}$ का मान बराबर है निम्न में से किसके बराबर है?

The value of $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{\cot x}}{\sqrt{\tan x} + \sqrt{\cot x}}$ is equal to which of the following ?

(A) $\frac{\pi}{4}$ (B) $\frac{\pi}{2}$ (C) π (D) $\frac{\pi}{3}$

24. $\int_0^{2a} f(x)dx = 2\int_0^a f(x)dx$ तो निम्न में कौन-सा कथन सत्य है?

$\int_0^{2a} f(x)dx = 2\int_0^a f(x)dx$ is true for which of the following ?

(A) $f(2a - x) = -f(x)$ (B) $f(2a - x) = f(x)$ (C) $f(x)$ is an odd function (D) $f(x)$ is an even function

25. $\int \frac{dx}{x^2 - a^2}$ का मान निम्न में से कौन है?

The value of $\int \frac{dx}{x^2 - a^2}$ is which of the following ?

(A) $\frac{1}{2a}\log\left|\frac{x-a}{x+a}\right|$ (B) $\frac{1}{2a}\log\left|\frac{x+a}{x-a}\right|$ (C) $\log\left(x + \sqrt{x^2 - a^2}\right)$ (D) $\log\left(x + \sqrt{x^2 + a^2}\right)$

26. यदि $\vec{a} = 2\hat{i} + \hat{j} - 8\hat{k}$ और $\vec{b} = \hat{i} + 3\hat{j} - 4\hat{k}$, तो $\vec{a} + \vec{b}$ का परिमाण निम्न में से किसके बराबर है?

If $\vec{a} = 2\hat{i} + \hat{j} - 8\hat{k}$ and $\vec{b} = \hat{i} + 3\hat{j} - 4\hat{k}$ then the magnitude of $\vec{a} + \vec{b}$ is equal to which of the following ?

(A) 13 (B) $\frac{13}{3}$ (C) $\frac{3}{13}$ (D) $\frac{4}{13}$

27. यदि A और B स्वतंत्र घटनाएँ है और $P\left(\frac{A}{B}\right)=\frac{1}{2}$ तो $P(A)$ का मान निम्न में से किसके बराबर है?

If A and B are independent events and $P\left(\frac{A}{B}\right)=\frac{1}{2}$ then the value of $P(A)$ is equal to which of the following ?

(A) 0 (B) $\frac{1}{4}$ (C) $\frac{1}{2}$ (D) None of these

28. यदि किसी सरल रेखा का दिक् कोज्या (k,k,k) है, तो k का मान निम्न में से कौन है?

If the direction cosine of a straight lines are (k,k,k) then value of k is which of the following ?

(A) $k>0$ (B) $0<k<1$ (C) $k=1$ (D) $k=\pm\frac{1}{\sqrt{3}}$

29. $\cos^{-1}\left(\cos\frac{7\pi}{6}\right)$ का मान निम्न में से कौन है?

$\cos^{-1}\left(\cos\frac{7\pi}{6}\right)$ is equal to which of the following ?

(A) $\frac{7\pi}{6}$ (B) $\frac{5\pi}{6}$ (C) $\frac{\pi}{3}$ (D) $\frac{\pi}{6}$

30. $x(x-2)(x-4),\ 1\le x\le 4$, माध्य मान साध्य को निम्न में से x के किस मान के लिए संतुष्ट करेगा?

$x(x-2)(x-4),\ 1\le x\le 4$, will satisfy mean value theorem at which of the following value of x ?

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4

31. यदि A और B वर्ग आव्यूह है तो $(AB)'$ निम्न में से किसके बराबर है

If A and B are square matrix then $(AB)'$ is equal to which of the following ?

(A) $A'B'$ (B) $B'A'$ (C) AB' (D) $A'B$

32. यदि $\begin{bmatrix}x+y\\x-y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&1\\4&3\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}1\\-2\end{bmatrix}$, तो (x,y) निम्न में से कौन होगा?

If $\begin{bmatrix}x+y\\x-y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&1\\4&3\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}1\\-2\end{bmatrix}$, then (x,y) is which of the following ?

(A) (1,1) (B) (1,–1) (C) (–1,1) (D) (–1,–1)

33. यदि $[A]_{m\times p}$ और $[B]_{p\times n}$ तो AB की कोटि निम्न में से कौन है?

If $[A]_{m\times p}$ and $[B]_{p\times n}$ then order of AB is which of the following ?

(A) $m\times p$ (B) $p\times n$ (C) $p\times p$ (D) $m\times n$

34. अवकल समीकरण $\frac{dy}{dx}+f=\frac{1+y}{x}$ का समाकलन गुणांक निम्न में से कौन है?

Integrating factor of the differential equation $\frac{dy}{dx}+f=\frac{1+y}{x}$ is which of the following ?

(A) e^x (B) xe^x (C) $\frac{e^x}{x}$ (D) $\frac{x}{e^x}$

35. यदि $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ एक रेखा का दिक कोज्या है, तो $\sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\gamma$ का मान निम्न में से किसके बराबर है?

If $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ are d.c.'s of a line, then the value of $\sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\gamma$ is equal to which of the following ?

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4

36. (α, β, γ) से गुजरने वाली और अक्ष पर समान कोण बनाने वाली रेखा का समीकरण है

The equation of line through (α, β, γ) and equally inclined to the axes are

(A) $x - \alpha = y - \beta = z - \gamma$ (B) $\frac{x-1}{\alpha} = \frac{y-1}{\beta} = \frac{z-1}{\gamma}$

(C) $\frac{x}{\alpha} = \frac{y}{\beta} = \frac{z}{\gamma}$ (D) None of these

37. यदि (i,j,k) तीन लम्बवत इकाई सदिश है, तो $i \cdot (j \times k) + j \cdot (i \times k) + k\,(i \times j)$ का मान निम्न में से कौन सा है?

If (i,j,k) are three perpendicular unit vector, then the value of $i \cdot (j \times k) + j \cdot (i \times k) + k\,(i \times j)$ is which of the following ?

(A) 0 (B) –1 (C) 1 (D) 3

38. $\hat{j} \times \hat{i}$ का मान निम्न में से कौन-सा है?

The value of $\hat{j} \times \hat{i}$ is which of the following.

(A) $\hat{k}$ (B) $-\hat{k}$ (C) $\hat{j}$ (D) i

39. $\left[\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}\right]$ का मान निम्न में से कौन-सा है?

The value of $\left[\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}\right]$ is which of the following ?

(A) 0 (B) 1 (C) $\vec{a} \times \vec{b}$ (D) $\vec{a} \times \vec{b} \times \vec{c}$

40. $\int \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}} dx$ का मान निम्न में से कौन-सा है?

$\int \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}} dx$ equal to which of the following ?

(A) $\tan^{-1}x$ (B) $\sin^{-1}x$ (C) $\sec^{-1}x$ (D) None of these

ANSWERS

1.	(A)	**2.**	(B)	**3.**	(D)	**4.**	(A)	**5.**	(B)	**6.**	(D)	**7.**	(C)	**8.**	(D)	**9.**	(A)	**10.**	(D)
11.	(A)	**12.**	(B)	**13.**	(B)	**14.**	(B)	**15.**	(B)	**16.**	(B)	**17.**	(B)	**18.**	(A)	**19.**	(C)	**20.**	(C)
21.	(B)	**22.**	(B)	**23.**	(A)	**24.**	(B)	**25.**	(A)	**26.**	(A)	**27.**	(C)	**28.**	(D)	**29.**	(B)	**30.**	(B)
31.	(B)	**32.**	(C)	**33.**	(D)	**34.**	(C)	**35.**	(B)	**36.**	(A)	**37.**	(C)	**38.**	(B)	**39.**	(A)	**40.**	(C)

खण्ड – II (गैर – वस्तुनिष्ठ प्रश्न)

SECTION-II (NON-OBJECTIVE TYPE QUESTIONS)

समय : 2 घंटा 05 मिनट **पूर्णांक : 60**
Time : 2 Hours 05 Min. **Full Marks : 60**

लघु उत्तरीय प्रश्न
(Short Answer Type Question)

प्रश्न संख्या 1 से 8 तक लघु उत्तरीय प्रकार के हैं। प्रत्येक के लिए 4 अंक निर्धारित है। **8 × 4 = 32**
Question Nos. 1 to 8 are of short answer type. Each question carries 4 marks. **8 × 4 = 32**

1. x के लिए हल करें (Solve for x) : $\sin^{-1} x + \sin^{-1} 2x = \frac{\pi}{3}$

2. सिद्ध करें (Prove that) : $\begin{vmatrix} -a^2 & ab & ac \\ ab & -b^2 & bc \\ ac & bc & -c^2 \end{vmatrix} = 4a^2b^2c^2$

3. K के किस मान के लिए, फलन $f(x) = \begin{cases} \frac{k\cos x}{\pi - 2x}, & x \neq \frac{\pi}{2} \\ 3, & x = \frac{\pi}{2} \end{cases}$ पर सतत होगा।

For what value of k, the function $f(x) = \begin{cases} \frac{k\cos x}{\pi - 2x}, & x \neq \frac{\pi}{2} \\ 3, & x = \frac{\pi}{2} \end{cases}$ is continuous at $x = \frac{\pi}{2}$.

4. यदि $x = a(\theta - \sin\theta), y = a(1 - \cos\theta)$, तो $\theta = \frac{\pi}{2}$ पर $\frac{dy}{dx}$ प्राप्त करें।

If $x = a(\theta - \sin\theta), y = a(1 - \cos\theta)$. Find $\frac{dy}{dx}$ at $\theta = \frac{\pi}{2}$.

5. यदि $A = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 2 \end{bmatrix}$ और $B = [1,0,4]$ तो $(AB)' = B'A'$ की जाँच करें।

If $A = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 2 \end{bmatrix}$ and $B = [1,0,4]$ verify that $(AB)' = B'A'$.

6. अवकल समीकरण को हल करें : $\frac{dy}{dx} = 1 - x + y - xy$

Solve the differential equation $\frac{dy}{dx} = 1 - x + y - xy$

7. यदि $\vec{a} = \lambda\hat{i} + \hat{j} + 4\hat{k}$ का अदिश प्रक्षेप $\vec{b} = 2\hat{i} + 6\hat{j} + 3\hat{k}$ पर 4 इकाई है तो λ का मान ज्ञात करें।

Find λ when the scalar projection of $\vec{a} = \lambda\hat{i} + \hat{j} + 4\hat{k}$ on $\vec{b} = 2\hat{i} + 6\hat{j} + 3\hat{k}$ is 4 unit.

8. यदि $P(A) = 0.4, P(B) = 0.8, P\left(\frac{B}{A}\right) = 0.6$ है तो $P\left(\frac{A}{B}\right)$ और $P(A \cup B)$ ज्ञात करें।

If $P(A) = 0.4, P(B) = 0.8, P\left(\frac{B}{A}\right) = 0.6$. Find $P\left(\frac{A}{B}\right)$ and $P(A \cup B)$

दीर्घ उत्तरीय प्रश्न
(Long Answer Type Question)

प्रश्न संख्या 9 से 12 तक दीर्घ उत्तरीय प्रकार के हैं। प्रत्येक के लिए 7 अंक निर्धारित है। **4 × 7 = 28**

Question Nos. 9 to 12 are of short answer type. Each question carries 7 marks. **4 × 7 = 28**

9. दीर्घवृत $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ और सरल रेखा $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ से घिरे लघु क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात करें।

Find the area of the smaller region bounded by the ellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ and straight line $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$.

10. रेखा $\frac{x}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-2}{3}$ में बिन्दु (1,6,3) का प्रतिबिम्ब ज्ञात करें।

Find the image of the point (1,6,3) in the line $\frac{x}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-2}{3}$.

11. ज्ञात करें (Evaluate) : $\int \frac{2\sin x + 3\cos x}{3\sin x + 4\cos x} dx$

12. न्यूनतमीकरण करें $Z = 20x + 10y$

जबकि $x + 2y \geq 40$

$3x + y \geq 30$

$4x + 3y \geq 60$

$x, y \geq 0$

Maximise $Z = 20x + 10y$ subject to constraints

Subject to $x + 2y \geq 40$

$3x + y \geq 30$

$4x + 3y \geq 60$

$x, y \geq 0$

ANSWERS

1. Given that $\sin^{-1}x+\sin^{-1}2x=\frac{\pi}{3}=\sin^{-1}\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\Rightarrow \quad \sin^{-1}x-\sin^{-1}\frac{\sqrt{3}}{2}=-\sin^{-1}2x$

$\Rightarrow \quad \sin^{-1}\left[x\sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{1-x^2}\right]=\sin^{-1}\left[x\sqrt{1-\frac{3}{4}}+\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{1-x^2}\right]=\sin^{-1}[-2x]$

$[\because \sin^{-1}(-x)=-\sin^{-1}x]$

$\Rightarrow \quad \frac{x}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{1-x^2}=-2x$

$\Rightarrow \quad x-\sqrt{3\left(1-x^2\right)}=-4x$

$\Rightarrow \quad 5x=\sqrt{3\left(1-x^2\right)}$

Squaring we get

$25x^2=3(1-x^2)$

$\Rightarrow \quad 28x^3=3$

$\Rightarrow \quad x^2=\frac{3}{28}$

$\therefore \quad x=\pm\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{7}}$

As $x=\frac{-\sqrt{3}}{2\sqrt{7}}$ does not satisfy the given equation

So, $x=\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{7}}$

2. $\begin{vmatrix} -a^2 & ab & ac \\ ab & -b^2 & bc \\ ac & bc & -c^2 \end{vmatrix}=abc\begin{vmatrix} -a & a & a \\ b & -b & b \\ c & c & -c \end{vmatrix}$

Taking common a from c_1, b from c_2 and c from c_3

$=abc\begin{vmatrix} 0 & 0 & a \\ 2b & -2b & b \\ 0 & 2c & -c \end{vmatrix}$

[By $c_1 \to c_1+c_3$ & $c_2 \to c_2-c_3$]

$$= abc \cdot a \cdot \begin{vmatrix} 2b & -2b \\ 0 & 2c \end{vmatrix} = a^2bc \times 4bc = 4a^2b^2c^2$$

3. Since, $f(x)$ is continuous at $x = \frac{\pi}{2}$

So $\left[f(x)\right]_{x=\frac{\pi}{2}} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} f(x) = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{k\cos x}{\pi - 2x}$

$$\Rightarrow \quad f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \lim_{h\to 0} \frac{k\cdot\cos\left(\frac{\pi}{2}+h\right)}{\pi - 2\left(\frac{\pi}{2}+h\right)} \qquad \left[\begin{array}{l} \text{put } = \frac{\pi}{2}+h \\ \text{As } x \to \frac{\pi}{2}, h \to 0 \end{array}\right]$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{-k\sin h}{-2h} = \frac{k}{2}\lim_{h\to 0}\frac{\sin h}{h} = \frac{k}{2}\times 1 = \frac{k}{2}$$

i.e. $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{k}{2}$

$\Rightarrow \quad 3 = \frac{k}{2}$

$\Rightarrow \quad k = 6$

4. $\because \quad x = a(\theta - \sin\theta)$

Differentiating both side w.r.t. θ

$\Rightarrow \quad \frac{dx}{d\theta} = a(1 - \cos\theta)$

and $y = a(1 - \cos\theta)$

$\Rightarrow \quad \frac{dy}{d\theta} = a\sin\theta$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}} = \frac{a\sin\theta}{a(1-\cos\theta)} = \frac{\sin\theta}{1-\cos\theta}$$

$$\text{At } \theta = \frac{\pi}{2}, \frac{dy}{dx} = \frac{\sin\frac{\pi}{2}}{1-\cos\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{1-0} = 1$$

5. $\because \quad A = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 2 \end{bmatrix}_{3\times 1}$ and $B = [1,0,4]_{1\times 3}$

$$\therefore \quad AB = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 2 \end{bmatrix} \cdot [1,0,4] = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 12 \\ 5 & 0 & 20 \\ 2 & 0 & 8 \end{bmatrix}$$

$$\therefore \quad (AB)' = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 12 & 20 & 8 \end{bmatrix}$$

Now, $A' = [3,5,2]_{1\times 3}$ & $B' = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}_{3\times 1}$

$$\therefore \quad B'A' = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix} \cdot [3,5,2] = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 12 & 20 & 8 \end{bmatrix}$$

$\therefore \quad (AB)' = B'A'$

6. Given differential equation is $\frac{dy}{dx} = 1 - x + y - xy$

or, $\frac{dy}{dx} = (1-x) + y(1-x) = (1-x)(1-y)$

or, $\frac{dy}{1+y} = (1-x)dx$

Integrating both side, we have

$$\int \frac{dy}{1+y} = \int (1-x)\,dx$$

$$\Rightarrow \quad \log|1+y| = x - \frac{x^2}{2} + c$$

7. The scaler projection of $\vec{a}$ on $\vec{b} = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{b}|}$

Now, $\vec{a}\cdot\vec{b} = (\lambda i + j + 4k)\cdot(2i + 6j + 3k) = 2\lambda + 6\times 1 + 4\cdot 3 = 2\lambda + 18$ and $\vec{b} = \sqrt{2^2 + 6^2 + 3^2} = \sqrt{49} = 7$

But, given that $\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{b}|} = 4$

$$\therefore \quad \frac{2\lambda + 18}{7} = 4$$

$\Rightarrow \quad 2\lambda = 28 - 18 = 10$

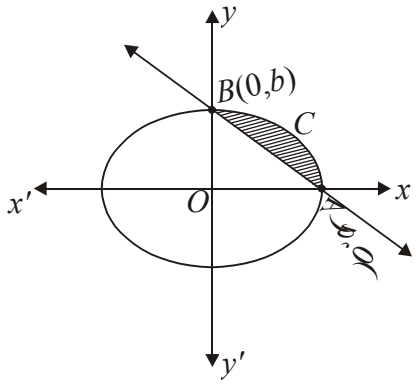
$\therefore \quad \lambda = 5$ unit

8. $\because \quad P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B/A) = 0.4 \times 0.6 = 0.24$

Now, $P\left(\frac{A}{B}\right) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0.24}{0.8} = 0.3$

and $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0.4 + 0.8 - 0.2 = 0.96$

9. The given ellipse is $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ and the line is $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$.



The sketch is as— The shaded region is the require area

$\therefore \quad ar(ABCA) = \int_0^a (y_1 - y_2)\,dx$

$= \int_0^a (y \text{ of the ellipse})\,dx - \int_0^a (y \text{ of the line})\,dx$

$= \int_0^a \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}\,dx - \int_0^a \frac{b(a-x)}{a}\,dx$

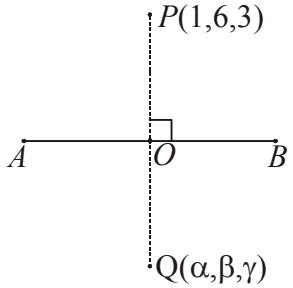
$= \frac{b}{a}\left[\frac{x\sqrt{a^2 - x^2}}{2} + \frac{a^2}{2}\sin^{-1}\frac{x}{a}\right]_0^a - \frac{b}{a}\left[ax - \frac{x^2}{2}\right]_0^a$

$= \frac{b}{a}\left[0 + \frac{a^2}{2}\sin^{-1}\frac{a}{a} - 0\right] - \frac{b}{a}\left(a^2 - \frac{a^2}{2} - 0\right)$

$= \frac{ab}{2} \cdot \sin^{-1}1 - \frac{b}{a} \times \frac{a^2}{2} = \left(\frac{\pi ab}{4} - \frac{ab}{2}\right)$

So, The require area $= \left(\frac{\pi ab}{4} - \frac{ab}{2}\right)$ sq. units

10. Let the given line $\frac{x}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-2}{3}$ be AB.



Any point 'O' on line AB is given by $(k, 2k+1, 3k+2)$

So, direction ratio of the line OP are $k-1$, $2k-5$, $3k-1$

$\because$ $OP \perp AB$

$\therefore$ $(k-1)\times 1 + (2k-5)\times 2 + (3k-1)\times 3 = 0$

$\Rightarrow$ $14k - 14 = 0$

$\Rightarrow$ $k = 1$

Hence, co-ordinate of O are $(1,3,5)$

Now, Let image of $P(1,6,3)$ in the given line be $Q(\alpha, \beta, \gamma)$

So, 'O' is the mid point of PQ

$\therefore$ $\dfrac{\alpha+1}{2} = 1, \dfrac{\beta+6}{2} = 3, \dfrac{\gamma+3}{2} = 5$

$\Rightarrow$ $\alpha = 1,\ \beta = 0,\ \gamma = 7$

So, The image of P is $R(1,0,7)$

11. Let $I = \int \dfrac{2\sin x + 3\cos x}{3\sin x + 4\cos x} \cdot dx$

Let $2\sin x + 3\cos x = A\left(3\sin x + 4\cos x\right) + B \cdot \dfrac{d}{dx}\left(3\sin x + 4\cos x\right)$

$= A(3\sin x + 4\cos x) + B \cdot (3\cos x - 4\sin x)$

$= (3A - 4B)\sin x + (4A + 3B)\cos x$

$\therefore$ $3A - 4B = 2$ and $4A + 3B = 3$

On solving, we have $A = \dfrac{18}{25}$ and $B = \dfrac{1}{25}$

$\therefore$ $I = \int \dfrac{A\left(3\sin x + 4\cos x\right) + B(3\cos x - 4\sin x)}{3\sin x + 4\cos x} \cdot dx$

$= \int \left(A + B \cdot \dfrac{3\cos x - 4\sin x}{3\sin x + 4\cos x} \right) dx$

$= \int A dx + B \int \dfrac{3\cos x - 4\sin x}{3\sin x + 4\cos x} dx$

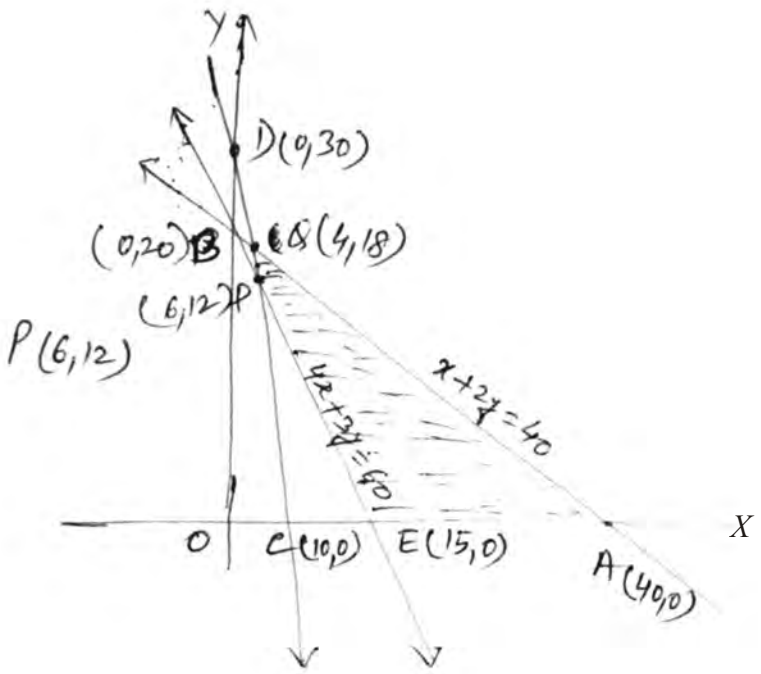
$= \dfrac{18}{25}x + \dfrac{1}{25} \cdot \log\left[3\sin x + 4\cos x\right] + C$

[Put $3\sin x + 4\cos x = t$ and evaluate the 2nd integral]

12. On changing the inequality into equation, we have

$x + 2y = 40$, $3x + y = 30$, $4x + 3y = 60$

We first draw the graph of given line



The shaded region $EAQPE$ is the feasible region.

The vertices of the feasible region are E (15,0), A(40,0), Q (4,18) and P(6,12)

Now, the value of the objective function are as :

Given, $z = 20x + 10y$

At E (15,0) , $z = 20 \times 15 + 10 \times 0 = 300$

At A(40,0), $z = 20 \times 40 + 10 \times 0 = 800$

At Q(4,18), $z = 20 \times 4 + 10 \times 18 = 260$

At P(6,12), $z = 20 \times 6 + 10 \times 12 = 240$

Obviosly, z is minimum at P(6,12)

Hence, $x = 6, y = 12$ is optimal solution of the given LPP and the optimal value of z is 240.

SET-4

समय : 1 घंटा 10 मिनट | पूर्णांक : 40

Time : 1 Hours 10 Min. | **Full Marks : 40**

खण्ड – I (वस्तुनिष्ठ प्रश्न)

SECTION-I (OBJECTIVE TYPE QUESTIONS)

प्रश्न संख्या 1 से 40 तक निम्न में दिए गए चार विकल्पों में से एक ही उत्तर सही है। प्रत्येक प्रश्न के सही उत्तर को उत्तर तालिका में चिह्नित करें। **40 × 1 = 40**

From Question No. 1 to 40 there is one correct answer. In each question you have to mark that correct option from given options. **40 × 1 = 40**

1. $\frac{\log x}{x}$ का अधिकतम मान है।

The maximum value of $\frac{\log x}{x}$ is

(A) 1 (B) $\frac{2}{e}$ (C) e (D) $\frac{1}{e}$

2. यदि $P(A) = 0.5, P(B) = 0.2, P\left(\frac{B}{A}\right) = 0.2$ तो $P\left(\frac{A}{B}\right)$ है

If $P(A) = 0.5, P(B) = 0.2, P\left(\frac{B}{A}\right) = 0.2$ then $P\left(\frac{A}{B}\right)$ is

(A) 0.5 (B) 0.2 (C) 0.3 (D) 0.7

3. $\int \frac{dx}{a^2 + x^2}$ का मान है

The value of $\int \frac{dx}{a^2 + x^2}$ is

(A) $\sin^{-1}\frac{x}{a}$ (B) $\frac{1}{a}\tan^{-1}\frac{x}{a}$ (C) $\sec^{-1}\frac{x}{a}$ (D) None of these

4. वक्र $y^2 = 4ax$ और रेखा $y = x$ के बीच घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल है

The area enclosed between the curve $y^2 = 4x$ and the line $y = x$ is

(A) $\frac{1}{2}$ (B) $\frac{2}{3}$ (C) $\frac{4}{3}$ (D) $\frac{8}{3}$

5. तल $2x - 3y - 6z + 14 = 0$ पर अभिलम्ब का दिक् कोज्या है

The direction cosine of a normal to the plane $2x - 3y - 6z + 14 = 0$ are

(A) $\left(\frac{2}{7}, \frac{-3}{7}, \frac{-6}{7}\right)$ (B) $\left(\frac{-2}{7}, \frac{3}{7}, \frac{6}{7}\right)$ (C) $\left(\frac{-2}{7}, \frac{-3}{7}, \frac{-6}{7}\right)$ (D) None of these

6. तल $2x - y + z = 6$ और $x + y + 2z = 7$ के बीच का कोण है

The angle between the planes $2x - y + z = 6$ and $x + y + 2z = 7$ is

(A) $\frac{\pi}{4}$ (B) $\frac{\pi}{6}$ (C) $\frac{\pi}{3}$ (D) $\frac{\pi}{2}$

7. xy-तल पर किसी नार्मल की दिक कोज्या है

The direction cosine of any normal to the xy- plane are

(A) (1,0,0) (B) (0,1,0) (C) (1,1,0) (D) (0,0,1)

8. समीकरण $\vec{r} = \lambda \hat{i}$ प्रदर्शित करता है

The equation $\vec{r} = \lambda \hat{i}$ represents

(A) x-axis (B) y-axis (C) z-axis (D) None of these

9. यदि $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = 0$, तो

If $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = 0$, then

(A) $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ (B) $\vec{a} = \vec{b}$ (C) $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{b} \times \vec{c} = \vec{c} \times \vec{a}$ (D) None of these

10. यदि $\left|\vec{a} \times \vec{b}\right| = 4$ और $\left|\vec{a} \cdot \vec{b}\right| = 2$ तो $\left|\vec{a}\right|^2 . \left|\vec{b}\right|^2$ है

If $\left|\vec{a} \times \vec{b}\right| = 4$ and $\left|\vec{a} \cdot \vec{b}\right| = 2$ then $\left|\vec{a}\right|^2 . \left|\vec{b}\right|^2$ is

(A) 2 (B) 6 (C) 8 (D) 20

11. $\vec{a} \cdot \left(\vec{b} \times \vec{c}\right)$ बराबर है

$\vec{a} \cdot \left(\vec{b} \times \vec{c}\right)$ equal to

(A) $\left[\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}\right]$ (B) $\left[\vec{b}\ \vec{a}\ \vec{c}\right]$ (C) $\left[\vec{b}\ \vec{c}\ \vec{a}\right]$ (D) None of these

12. $\left[\hat{i}\ \hat{j}\ \hat{k}\right]$ का मान बराबर है

The value of $\left[\hat{i}\ \hat{j}\ \hat{k}\right]$ equal to

(A) 1 (B) 0 (C) 2 (D) None of these

13. अवकल समीकरण $\frac{d^4y}{dx^4} = y + \left(\frac{dy}{dx}\right)^4$ की कोटि और घात क्रमशः है

The order and degree of the differential equation $\frac{d^4y}{dx^4} = y + \left(\frac{dy}{dx}\right)^4$ are respectively

(A) 2,2 (B) 4,1 (C) 2,4 (D) 4,2

14. $(x \log x)\frac{dy}{dx} + y = 2\log x$ का समाकलन गुणांक है

The integrating factor of $(x \log x)\frac{dy}{dx} + y = 2\log x$ is

(A) x (B) e^x (C) $\log x$ (D) $\log(\log x)$

15. $\int_{-1}^{2} |x| dx$ का मान है

$\int_{-1}^{2} |x| dx$ equal to

(A) 1 (B) $\frac{3}{2}$ (C) 2 (D) $\frac{5}{2}$

16. $\int_{-2}^{2} (ax^3 + bx + c) dx$ का मान निर्भर है

The value of $\int_{-2}^{2} (ax^3 + bx + c) dx$ depends on

(A) The value of a (B) The value of b (C) The value of c (D) None of these

17. $\int \frac{\cos\sqrt{y}}{\sqrt{y}} dy$ का मान है

$\int \frac{\cos\sqrt{y}}{\sqrt{y}} dy$ is equal to

(A) $2\cos\sqrt{y}$ (B) $\sqrt{(\cos y)/y}$ (C) $\sin\sqrt{y}$ (D) $2\sin\sqrt{y}$

18. यदि $\begin{vmatrix} x & 2 \\ 18 & x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6 & 2 \\ 18 & 6 \end{vmatrix}$ तो x का मान बराबर है

If $\begin{vmatrix} x & 2 \\ 18 & x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6 & 2 \\ 18 & 6 \end{vmatrix}$ then x is equal to

(A) 0 (B) ±6 (C) –6 (D) 6

19. $\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$ का व्युत्क्रम है।

The inverse of $\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$ is

(A) $\begin{bmatrix} -\cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$ (B) $\begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$ (C) $\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{bmatrix}$ (D) None of these

20. यदि $\begin{vmatrix} a+b & b+c & c+a \\ b+c & c+a & a+b \\ c+a & a+b & b+c \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix}$ तो $k =$

If $\begin{vmatrix} a+b & b+c & c+a \\ b+c & c+a & a+b \\ c+a & a+b & b+c \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix}$, then $k =$

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 8

21. यदि $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, तो A^n का मान है

If $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, then A^n equal to

(A) $\begin{bmatrix} 1 & 2n \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ (B) $\begin{bmatrix} 2 & n \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ (C) $\begin{bmatrix} 1 & 2^n \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ (D) $\begin{bmatrix} 1 & n \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$

22. $\cos^{-1}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ का मुख्य मान है

Principal value of $\cos^{-1}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ is

(A) $\frac{3\pi}{4}$ (B) $\frac{5\pi}{4}$ (C) $\frac{-\pi}{4}$ (D) None of these

23. $\left[\cos^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)+2\sin^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)\right]$ का मान है

$\left[\cos^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)+2\sin^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)\right]$ equal to

(A) $\frac{\pi}{3}$ (B) $\frac{2\pi}{3}$ (C) $\frac{\pi}{2}$ (D) None of these

24. If $y = e^{3\log x}$, then $\frac{dy}{dx}$ is equal to

(A) $3x^2$ (B) $2\log x$ (C) $\frac{3y}{x}$ (D) $3xy$

25. a^x का अवकल गुणांक है।

Differential co-effcient of a^x is

(A) a^x (B) $a^x \log a$ (C) $\frac{a^x}{\log a}$ (D) $\log a^x$

26. वक्र $y = x^3 + 3x$ पर स्पर्शी बिन्दु $x = -1$ और $x = 1$ पर है

Tangent of the curve $y = x^3 + 3x$ at $x = -1$ and $x = 1$ are

(A) parallel (B) intersecting at right angles

(C) intersecting at an angle of 45º (D) None of these

27. $\cos\sqrt{x}$ का x के सापेक्ष में अवकल गुणांक है

d.c. of $\cos\sqrt{x}$ with respect to x is

(A) $\frac{1}{\sqrt{x}}\sin\sqrt{x}$ (B) $\frac{1}{2\sqrt{x}}\sin\sqrt{x}$ (C) $-\frac{1}{2\sqrt{x}}\sin\sqrt{x}$ (D) $\sin\sqrt{x}$

28. वक्र $y^2 = x$ और $x^2 = y$ के बीच $(1,1)$ पर कोण है

The angle between the curves $y^2 = x$ and $x^2 = y$ at $(1,1)$ is

(A) $\tan^{-1}\frac{4}{3}$ (B) $\tan^{-1}\frac{3}{4}$ (C) 90º (D) 45º

29. यदि $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ और $B = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}$ तो $A + B$ है

If $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ and $B = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}$ then $A + B$ is

(A) $\begin{bmatrix} 3 & 7 \\ 1 & 7 \end{bmatrix}$ (B) $\begin{bmatrix} 1 & 7 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ (C) $\begin{bmatrix} 3 & 7 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$ (D) None of these

30. यदि A एक $m \times n$ आव्यूह है, तो A' है

If A is a $m \times n$ matrix then A' is

(A) $m \times n$ (B) $n \times m$ (C) $m \times m$ (D) $n \times n$

31. यदि $\vec{a} = a_1 i + a_2 j + a_3 k$ और $\vec{b} = b_1 i + b_2 j + b_3 k$, तो $\vec{a} \cdot \vec{b}$ है

If $\vec{a} = a_1 i + a_2 j + a_3 k$ and $\vec{b} = b_1 i + b_2 j + b_3 k$ then $\vec{a} \cdot \vec{b}$ is

(A) $a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2$ (B) $a_1b_2 + a_2b_1 + c_1c_2$ (C) $a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$ (D) None of these

32. $2\hat{i}+2\hat{j}-\hat{k}$ और $6\hat{i}-3\hat{j}+2\hat{k}$ के बीच का कोण है

Angle between $2\hat{i}+2\hat{j}-\hat{k}$ and $6\hat{i}-3\hat{j}+2\hat{k}$ is

(A) $\cos^{-1}\frac{4}{21}$ (B) $\cos^{-1}\frac{16}{21}$ (C) $\cos^{-1}\frac{4}{5}$ (D) $\cos^{-1}\frac{21}{8}$

33. $\hat{i}\cdot\hat{k}$ बराबर है (equal to)

(A) 0 (B) 1 (C) $\hat{j}$ (D) None of these

34. दो पासे को साथ-साथ उछाला जाता है। योग 7 आने की प्रायिकता है।

Two dice are tossed simultanously. The probability of getting a sum 7 is

(A) $\frac{1}{6}$ (B) $\frac{5}{6}$ (C) $\frac{5}{36}$ (D) $\frac{1}{9}$

35. $\left|\hat{i}+\hat{j}+\hat{k}\right|$ बराबर है (equal to)

(A) $\sqrt{2}$ (B) $\sqrt{3}$ (C) 2 (D) None of these

36. z-अक्ष की दिक्कोज्या है।

The direction cosine of z-axis is

(A) (0,1,0) (B) (1,0,0) (C) (0,0,1) (D) (0,0,2)

37. दो रेखा जिसकी दिक्कोज्या (l_1, m_1, n_1) और (l_2, m_2, n_2) है परस्पर लम्बवत है यदि

Two lines with d.c. (l_1, m_1, n_1) and (l_2, m_2, n_2) are at right angle if

(A) $l_1l_2 + m_1m_2 + n_1n_2 = 0$ (B) $l_1 = l_2, m_1 = m_2, n_1 = n_2$

(C) $\frac{l_1}{l_2}=\frac{m_1}{m_2}=\frac{n_1}{n_2}$ (D) $l_1l_2 = m_1m_2 = n_1n_2$

38. मूल बिंदु से रेखा $\vec{r}=\left(4\hat{i}+2\hat{j}+4\hat{k}\right)+\lambda\left(3\hat{i}+4\hat{j}-5\hat{k}\right)$ पर लम्ब की दूरी है।

(A) 2 (B) $2\sqrt{3}$ (C) 6 (D) 7

39. यदि $x = a\cos^4\theta$ और $y = a\sin^4\theta$, तो $\theta=\frac{3\pi}{4}$ पर $\frac{dy}{dx}$ है

If $x = a\cos^4\theta$ and $y = a\sin^4\theta$ then $\frac{dy}{dx}$ at $\theta=\frac{3\pi}{4}$ is

(A) a^2 (B) 1 (C) –1 (D) $-a^2$

40. $P\left(\frac{A}{B}\right)+P\left(\frac{A'}{B}\right)$ का मान है।

The value of $P\left(\frac{A}{B}\right)+P\left(\frac{A'}{B}\right)$ is

(A) 1 (B) 0 (C) $\frac{1}{2}$ (D) None of these

ANSWERS

1. (D)	**2.** (A)	**3.** (B)	**4.** (D)	**5.** (A)	**6.** (C)	**7.** (D)	**8.** (A)	**9.** (C)	**10.** (D)
11. (A)	**12.** (A)	**13.** (B)	**14.** (C)	**15.** (D)	**16.** (C)	**17.** (D)	**18.** (B)	**19.** (D)	**20.** (B)
21. (A)	**22.** (A)	**23.** (B)	**24.** (A)	**25.** (B)	**26.** (A)	**27.** (C)	**28.** (B)	**29.** (A)	**30.** (B)
31. (C)	**32.** (A)	**33.** (A)	**34.** (A)	**35.** (B)	**36.** (C)	**37.** (A)	**38.** (C)	**39.** (C)	**40.** (A)

खण्ड – II (गैर – वस्तुनिष्ठ प्रश्न)

SECTION-II (NON-OBJECTIVE TYPE QUESTIONS)

समय : 2 घंटा 05 मिनट **पूर्णांक : 60**
Time : 2 Hours 05 Min. **Full Marks : 60**

लघु उत्तरीय प्रश्न
(Short Answer Type Question)

प्रश्न संख्या 1 से 8 तक लघु उत्तरीय प्रकार के हैं। प्रत्येक के लिए 4 अंक निर्धारित है। **8 × 4 = 32**
Question Nos. 1 to 8 are of short answer type. Each question carries 4 marks. **8 × 4 = 32**

1. फलन $f(x) = x^2 - 2x + 4$ के लिए $[1,5]$ पर लैंगरान्जेज माध्य मान साध्य को जाँचे।
Verify Lagrange's mean value theorem for the function $f(x) = x^2 - 2x + 4$ on $[1,5]$

2. यदि $x^3 + y^3 = \sin(x + y)$, तो $\frac{dy}{dx}$ ज्ञात करें।

If $x^3 + y^3 = \sin(x + y)$, find $\frac{dy}{dx}$

3. यदि $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 7 \end{bmatrix}$ और $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, तो k का मान ज्ञात करें ताकि $A^2 = 8A + KI$

If $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 7 \end{bmatrix}$ and $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, then find k so that $A^2 = 8A + KI$

4. माना कि N, प्राकृतिक संख्याओं का समुच्चय है। सम्बन्ध R, $N \times N$ पर इस प्रकार परिभाषित है $(a, b)\ R\ (c,d)$ यदि और केवल यदि $a + d = b + c$ दिखावें कि R एक तुल्यता सम्बन्ध है।
Let N be the set of all Natural numbers. A relation R be defined on $N \times N$ by $(a,b)\ R\ (c,d)$ iff $a + d = b + c$. Show that R is an equivalence relation.

5. ज्ञात करें (Evaluate) : $\int \frac{xe^x}{(1+x)^2} dx$

6. सिद्ध करें (Prove that) : $\tan^{-1}\frac{1}{3} + \tan^{-1}\frac{1}{5} + \tan^{-1}\frac{1}{7} + \tan^{-1}\frac{1}{8} = \frac{\pi}{4}$

7. सिद्ध करें (Prove that) : $\begin{vmatrix} 1 & a & a^3 \\ 1 & b & b^3 \\ 1 & c & c^3 \end{vmatrix} = (a-b)(b-c)(c-a)(a+b+c)$

8. यदि $\vec{a} = 2\hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k}$ और $\vec{b} = -\hat{i} + \hat{j} - \hat{k}$ तो $\vec{a} + \vec{b}$ की दिशा में एक इकाई सदिश ज्ञात करें।

If $\vec{a} = 2\hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k}$ and $\vec{b} = -\hat{i} + \hat{j} - \hat{k}$, find a unit vector in the direction of $\vec{a} + \vec{b}$.

दीर्घ उत्तरीय प्रश्न
(Long Answer Type Question)

प्रश्न संख्या 9 से 12 तक दीर्घ उत्तरीय प्रकार के हैं। प्रत्येक के लिए 7 अंक निर्धारित है। **4 × 7 = 28**

Question Nos. 9 to 12 are of short answer type. Each question carries 7 marks. **4 × 7 = 28**

9. अवकल समीकरण $x\,(1+y^2)dx - y(1+x^2)dy = 0$ को हल करें। दिया गया है $y = 0$ जब $x = 1$

Solve the differential equation $x\,(1+y^2)dx - y(1+x^2)dy = 0$ given that $y = 0$ when $x = 1$

10. ज्ञात करें (Evaluate) : $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x}{\sin x + \cos x}\,dx$

11. एक झोले में 5 गेंद है। दो गेंद निकाला जाता है और वह उजला पाया जाता है। झोले में सभी गेंद उजला होने की प्रायिकता क्या होगी?

An urn contains five balls. Two balls are drawn and are found to be white. What is the probability that all the balls are white.

12. न्यूनतमीकरण करें $Z = x - 5y + 20$

जबकि $x - y \geq 0$

$-x + 2y \geq 2$

$x \geq 3$

$y \leq 4$

$x, y \geq 0$

Maximise $Z = x - 5y + 20$ subject to constraints

Subject to $x - y \geq 0$

$-x + 2y \geq 2$

$x \geq 3$

$y \leq 4$

$x, y \geq 0$

ANSWERS

1. Since, $f(x) = x^2 - 2x + 4$ is a polynomial.

So, $f(x)$ is continuous on $[1,5]$ and differentiable on $(1,5)$

Now, $f'(x) = 2x - 2$

and $f(1) = 1 - 2 + 4 = 3$

$f(5) = 25 - 10 + 4 = 19$

By Lagrange's mean value theorem, there exists $c \in (1,5)$ such that

$$f'(c) = \frac{f(5) - f(1)}{5 - 1}$$

$$\Rightarrow \quad 2c - 2 = \frac{19 - 3}{5 - 1} = \frac{16}{4} = 4$$

$$\Rightarrow \quad 2c = 6$$

$\therefore \quad c = 3 \in (1,5)$

Hence, Lagrange's mean value theorem is verified.

2. Given that $x^3 + y^3 = \sin(x+y)$

Differentiating w.r.t. x, we have

$$\frac{d}{dx}(x^3 + y^3) = \frac{d}{dx}[\sin(x+y)]$$

$$\Rightarrow \quad 3x^2 + 3y^2 \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{d\sin(x+y)}{d(x+y)} \cdot \frac{d}{dx}(x+y)$$

$$\Rightarrow \quad 3x^2 + 3y^2 \cdot \frac{dy}{dx} = \cos(x+y)\left[1 + \frac{dy}{dx}\right]$$

$$\Rightarrow \quad \left[3y^2 - \cos(x+y)\right] \cdot \frac{dy}{dx} = \cos(x+y) - 3x^2$$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = \frac{\cos(x+y) - 3x^2}{3y^2 - \cos(x+y)}$$

3. Since, $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 7 \end{bmatrix}$

$$\therefore \quad A^2 = A \cdot A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 7 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -8 & 49 \end{bmatrix}$$

Again, $8A + KI = 8\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 7 \end{bmatrix} + k\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 0 \\ -8 & 56 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8+k & 0 \\ -8 & 56+k \end{bmatrix}$

$\therefore \quad A^2 = 8A + KI$

$$\Rightarrow \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -8 & 49 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8+k & 0 \\ -8 & 56+k \end{bmatrix}$$

By equality of matrices

$1 = 8 + k$ and $56 + k = 49$

$\Rightarrow \quad k = -7$

4. To show R is an equivalence relation.

We have to show R is (i) Reflexive (ii) Symmetric (iii) Transitive

(i) Since $a + b = b + a$

$\therefore \quad (a,b)\ R\ (a,b)$

$\Rightarrow$ R is Reflexive

(ii) $(a,b)\ R\ (c,d) \Rightarrow a + d = b + c$

$\Rightarrow \quad b + c = a + d$

$\Rightarrow \quad c + b = d + a$

$\Rightarrow \quad (c,d)\ R\ (a,b)$

$\therefore$ R is symmetric

(iii) Let $(a,b)\ R\ (c,d)$ and $(c,d)\ R\ (e,f)$

$a + b = b + c$ and $c + f = d + e$

$a + d + c + f = b + c + d + e$

$\Rightarrow\ a + f = b + e$

$\Rightarrow\ (a,b)\ R\ (e,f)$

$\therefore$ R is transitive

Hence R is an equivalence relation on $N \times N$

5. $I = \int \frac{xe^x}{(1+x)^2}dx = \int \frac{1+x-1}{(1+x)^2}e^x \cdot dx$

$$= \int e^x \left[\frac{1+x}{(1+x^2)} - \frac{1}{(1+x)^2}\right]dx = \int e^x \left[\frac{1}{1+x} + \left\{-\frac{1}{(1+x)^2}\right\}\right]dx$$

$$= \int e^x \left[f(x) + f'(x)\right]dx \text{ where } f(x) = \frac{1}{1+x}$$

$$= e^x f(x) + c = e^x \cdot \frac{1}{1+x} + c = \frac{e^x}{1+x} + c$$

6. L.H.S. $= \tan^{-1}\frac{1}{3} + \tan^{-1}\frac{1}{5} + \tan^{-1}\frac{1}{7} + \tan^{-1}\frac{1}{8}$

$$= \left(\tan^{-1}\frac{1}{3} + \tan^{-1}\frac{1}{7}\right) + \left(\tan^{-1}\frac{1}{5} + \tan^{-1}\frac{1}{8}\right)$$

$$= \tan^{-1}\frac{\frac{1}{3}+\frac{1}{7}}{1-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{7}} + \tan^{-1}\frac{\frac{1}{5}+\frac{1}{8}}{1-\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{8}}$$

$$= \tan^{-1}\frac{10}{21}\cdot\frac{21}{20} + \tan^{-1}\frac{13}{40}\cdot\frac{40}{39}$$

$$= \tan^{-1}\frac{1}{2} + \tan^{-1}\frac{1}{3}$$

$$= \tan^{-1}\frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}}$$

$$= \tan^{-1}1 = \frac{\pi}{4} = \text{R.H.S.}$$

7. Let $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & a & a^3 \\ 1 & b & b^3 \\ 1 & c & c^3 \end{vmatrix}$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & a & a^3 \\ 0 & b-a & b^3-a^3 \\ 0 & c-a & c^3-a^3 \end{vmatrix}$$

By applying $R_2 \to R_2 - R_1$ and $R_3 \to R_3 - R_1$

$$= (b-a)(c-a)\begin{vmatrix} 1 & a & a^3 \\ 0 & 1 & b^2+ba+a^2 \\ 0 & 1 & c^2+ca+a^2 \end{vmatrix}$$

By taking common $(b-a)$ from R_2 and $(c-a)$ from R_3

$$= (b-a)(c-a)\cdot 1\cdot \begin{vmatrix} 1 & b^2+ab+a^2 \\ 1 & c^2+ca+a^2 \end{vmatrix}$$ (Expanding along c_1)

$= (b-a)(c-a)\,[(c^2+ca+a^2)-(b^2+ba+a^2)]$

$= (b-a)(c-a)[(c^2-b^2)+a\,(c-b)]$

$= (b-a)\,(c-a)(c-b)\,(c+b+a)$

$= (a-b)\,(b-c)\,(c-a)\,(a+b+c)$

8. Here, $\vec{a} = 2\hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k}$

and $\vec{b} = -\hat{i} + \hat{j} - \hat{k}$

$\therefore \quad \vec{a} + \vec{b} = \hat{i} + 0\cdot\hat{j} + \hat{k} = \hat{i} + \hat{k}$

$\therefore \quad \left|\vec{a} + \vec{b}\right| = \sqrt{1^2+0^2+1^2} = \sqrt{2}$

So, unit vector along $\left(\vec{a}+\vec{b}\right) = \dfrac{\vec{a}+\vec{b}}{\left|\vec{a}+\vec{b}\right|} = \dfrac{\hat{i}+\hat{k}}{\sqrt{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\hat{i} + \dfrac{1}{\sqrt{2}}\hat{k}$

9. Given that $x\,(1+y^2)dx - y\,(1+x^2)dy = 0$

or, $\quad x\,(1+y^2)dx = y\,(1+x^2)dy$

or, $\quad \dfrac{y}{1+y^2}dy = \dfrac{x}{1+x^2}dx$

Integrating both side, we have

$$\int \frac{y}{1+y^2}dy = \int \frac{x}{1+x^2}dx$$

or, $\quad \dfrac{1}{2}\int \dfrac{2y}{1+y^2}dy = \dfrac{1}{2}\int \dfrac{2x}{1+x^2}dx$

or, $\frac{1}{2}\log(1+y^2)=\frac{1}{2}\log\left(1+x^2\right)+c$ …(i)

Again, when $x=1, y=0$

$\therefore \quad \frac{1}{2}\log 1=\frac{1}{2}\log 2+c$

$\Rightarrow \quad c=-\frac{1}{2}\log 2$

So, from (i)

$$\frac{1}{2}\log(1+y^2)=\frac{1}{2}\log(1+x^2)-\frac{1}{2}\log 2$$

or, $\log(1+y^2)=\log(1+x^2)-\log 2$

or, $\log(1+y^2)=\log\left(\frac{1+x^2}{2}\right)$

or, $1+y^2=\frac{1+x^2}{2}$

$\Rightarrow \quad x^2-2y^2=1$

Hence, the require solution of given differential equation is $x^2-2y^2=1$

10. Let $f(x)=\frac{x}{\sin x+\cos x}$ …(i)

then $f\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\frac{\frac{\pi}{2}-x}{\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)+\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}=\frac{\frac{\pi}{2}-x}{\cos x+\sin x}$ …(ii)

By (i) + (ii)

$\Rightarrow \quad f(x)+f\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{\cos x+\sin x}=\frac{\pi}{2\sqrt{2}\cdot\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}=\frac{\pi}{2\sqrt{2}}\cdot\sec\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$

Now, $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx$

So, $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}} f\left(\frac{\pi}{2}-x\right)dx$

$2I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[f(x)+f\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\right]dx$

$\therefore \quad I=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[f(x)+f\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\right]\cdot dx$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2\sqrt{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sec\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \cdot dx$$

$$= \frac{\pi}{4\sqrt{2}} \left[\log \left| \sec\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + \tan\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \right| \right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{\pi}{4\sqrt{2}} \left[\log \left| \sec\frac{\pi}{4} + \tan\frac{\pi}{4} \right| \right] - \log\left[\left| \sec\frac{\pi}{4} - \tan\frac{\pi}{4} \right| \right]$$

$$= \frac{\pi}{4\sqrt{2}} \left[\log\left(\sqrt{2}+1\right) - \log\left(\sqrt{2}-1\right) \right]$$

$$= \frac{\pi}{4\sqrt{2}} \log\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1} = \frac{\pi}{4\sqrt{2}} \log\left(\sqrt{2}+1\right)^2 = \frac{\pi}{2\sqrt{2}} \log\left(\sqrt{2}+1\right)$$

11. Let A = The events of drawing two white balls when two balls are drawn out of 5 balls in urn

A_1 = The events that urn contains 5 white balls

A_2 = The events that urn contains 4 white balls

A_3 = The events that urn contains 3 white balls

A_4 = The events that urn contains 2 white balls

We have to find $P\left(\frac{A_1}{A}\right)$

So, By Baye's theorem

$$P\left(\frac{A_1}{A}\right) = \frac{P(A_1) \cdot P\left(\frac{A}{A_1}\right)}{P(A_1) \cdot P\left(\frac{A}{A_1}\right) + P(A_2) \cdot P\left(\frac{A}{A_2}\right) + P(A_3) \cdot P\left(\frac{A}{A_3}\right) + P(A_4) \cdot P\left(\frac{A}{A_4}\right)}$$

Here, we assume that

$$P(A_1) = P(A_2) = P(A_3) = P(A_4)$$

So, $P(A_1) = P(A_2) = P(A_3) = P(A_4) = \frac{1}{4}$

$P\left(\frac{A}{A_1}\right)$ = Probability of drawing 2 white balls when urn contains 5 white balls & 2 balls are drawn from urn.

$$= \frac{5C_2}{5C_2} = 1$$

Similarly, $P\left(\frac{A}{A_2}\right) = \frac{4c_2}{5c_2} = \frac{6}{10}, P\left(\frac{A}{A_3}\right) = \frac{3c_2}{5c_2} = \frac{3}{10}$ and $P\left(\frac{A}{A_4}\right) = \frac{2c_2}{5c_2} = \frac{1}{10}$

So, $P\left(\frac{A_1}{A}\right) = \frac{\frac{1}{4}\cdot 1}{\frac{1}{4}\cdot 1 + \frac{1}{4}\cdot\frac{6}{10} + \frac{1}{4}\cdot\frac{3}{10} + \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{10}} = \frac{1}{1+\frac{6}{10}+\frac{3}{10}+\frac{1}{10}} = \frac{10}{20} = \frac{1}{2}$

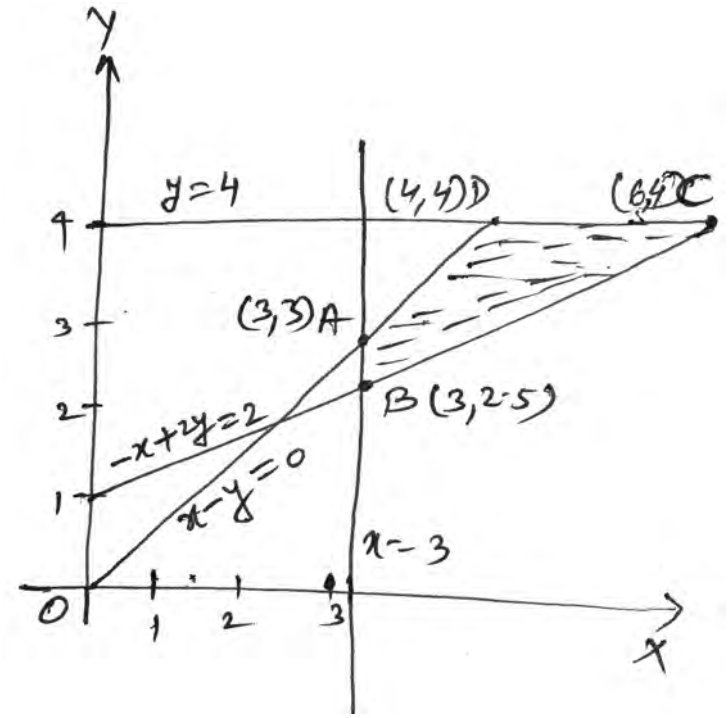
12. First, we draw the lines

$x - y = 0$ …(i)

$-x + 2y = 2$ …(ii)

$x = 3$ …(iii)

$y = 4$ …(iv)



The feasible region is shaded region ABCDA. Its vertices are $A(3,3)$, $B(3,2.5)$, $C(6,4)$ and $D(4,4)$

Given objective function is $z = x - 5y + 20$

At $A(3,3)$, $z = 3 - 5 \times 3 + 20 = 8$

At $B(3, 2.5)$, $z = 3 - 5 \times 2.5 + 20 = 10.5$

At $C(6,4)$, $z = 6 - 5 \times 4 + 20 = 6$

At $D(4,4)$, $z = 4 - 5 \times 4 + 20 = 4$

Here, the minimum value of z is 4 at (4,4)

Hence, $x = 4, y = 4$ is the solution of given LPP and minimum $z = 4$.

SET-5

समय : 1 घंटा 10 मिनट | पूर्णांक : 40

Time : 1 Hours 10 Min. | **Full Marks : 40**

खण्ड – I (वस्तुनिष्ठ प्रश्न)

SECTION-I (OBJECTIVE TYPE QUESTIONS)

प्रश्न संख्या 1 से 40 तक निम्न में दिए गए चार विकल्पों में से एक ही उत्तर सही है। प्रत्येक प्रश्न के सही उत्तर को उत्तर तालिका में चिह्नित करें। **40 × 1 = 40**

From Question No. 1 to 40 there is one correct answer. In each question you have to mark that correct option from given options. **40 × 1 = 40**

1. यदि $f: R \to R, f(x) = 5x + 4$ के द्वारा परिभाषित है तो निम्न में कौन-सा $f^{-1}(x)$ के बराबर है

If $f: R \to R$, is defined by $f(x) = 5x + 4$ then which of the following is equal to $f^{-1}(x)$

(A) $\frac{x-5}{4}$ (B) $\frac{x-4}{5}$ (C) $\frac{x}{5}-4$ (D) $\frac{x}{4}-4$

2. यदि द्विपद संक्रिया '0', $a\ 0\ b = a^2 + b^2$ के द्वारा परिभाषित है तो निम्न में कौन-सा (102)06 के बराबर है।

If binary operation '0' is defined as $a\ 0\ b = a^2 + b^2$ then (102)06 equal to which of the following.

(A) 12 (B) 28 (C) 61 (D) None of these

3. यदि $\sin^{-1}(1-x) - 2\sin^{-1} x = \frac{\pi}{2}$ तो x का मान है।

If $\sin^{-1}(1-x) - 2\sin^{-1} x = \frac{\pi}{2}$, then x is equal to

(A) $0, \frac{1}{2}$ (B) $1, \frac{1}{2}$ (C) 0 (D) $\frac{1}{2}$

4. निम्न में कौन-सा $\tan^{-1}\sqrt{3} - \cot^{-1}\left(-\sqrt{3}\right)$ के बराबर है।

$\tan^{-1}\sqrt{3} - \cot^{-1}\left(-\sqrt{3}\right)$ is equal to which of the following

(A) π (B) $-\frac{\pi}{2}$ (C) 0 (D) $2\sqrt{3}$

5. $\cos(\sin^{-1}x + \cos^{-1}x)$ का मान बराबर होगा।

The value of $\cos(\sin^{-1}x + \cos^{-1}x)$ will be equal to

(A) 0 (B) 1 (C) $\frac{\pi}{2}$ (D) $\frac{\pi}{3}$

6. यदि $\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{a}$ तो $\frac{dy}{dx}$ का मान है।

If $\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{a}$ then value of $\frac{dy}{dx}$ equals

(A) $\frac{-\sqrt{x}}{\sqrt{y}}$ (B) $-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{y}{x}}$ (C) $\frac{-\sqrt{y}}{\sqrt{x}}$ (D) None of these

7. यदि $y=e^{\sin\sqrt{x}}$ तो $\frac{dy}{dx}$ का मान निम्न में से कौन-सा है

If $y=e^{\sin\sqrt{x}}$ then $\frac{dy}{dx}$ equal to which of the following ?

(A) $e^{\sin\sqrt{x}}\cdot\cos\sqrt{x}$ (B) $\frac{e^{\sin\sqrt{x}}\cdot\cos\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}$ (C) $\frac{e^{\sin\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}$ (D) None of these

8. $\int\sqrt{1+\sin x}dx$ का मान है।

The value of $\int\sqrt{1+\sin x}dx$ equal

(A) $-\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{2}\right)+C$ (B) $\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{2}\right)$

(C) $-2\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)+C$ (D) None of these

9. $\tan^{-1}\left(-\sqrt{3}\right)$ का मुख्य मान है।

The principal value of $\tan^{-1}\left(-\sqrt{3}\right)$ is

(A) $\frac{2\pi}{3}$ (B) $\frac{4\pi}{3}$ (C) $-\frac{\pi}{3}$ (D) None of these

10. निम्न में से किस बिन्दु पर रेखा $y=x+1$, वक्र $y^2=x+1$, वक्र $y^2=4x$ पर स्पर्श रेखा है।

The line $y=x+1$ is tangent to the curve $y^2=4x$ at which of the following points.

(A) (1,2) (B) (2,1) (C) (1, –2) (D) (–1,2)

11. वृत के त्रिज्या r के सापेक्ष क्षेत्रफल परिवर्तन की दर $r=6$cm पर है

The rate of change of area of a cricle with respect to its radius r at $r=6$ cm is

(A) 12π (B) 11π (C) $10\ \pi$ (D) $8\ \pi$

12. निम्न में कौन-सा $\frac{d^2y}{dx^2}$ के बराबर है यदि $y=a^x$ है।

If $y=a^x$, then $\frac{d^2y}{dx^2}$ is equal to which of the following

(A) $a^x\log a$ (B) $a^x\cdot(\log a)^2$ (C) $(a^x)^2\cdot\log a$ (D) None of these

13. सदिश $\hat{i}\times\left(\hat{j}+\hat{k}\right)+\hat{j}\times\left(\hat{k}+\hat{i}\right)+\hat{k}\times\left(\hat{i}+\hat{j}\right)$ के परिमाण का मान बराबर है।

The value of magnitude of the vector $\hat{i}\times\left(\hat{j}+\hat{k}\right)+\hat{j}\times\left(\hat{k}+\hat{i}\right)+\hat{k}\times\left(\hat{i}+\hat{j}\right)$

(A) 0 (B) 1 (C) –1 (D) $\hat{i}\times\left(\hat{j}\times\hat{k}\right)$

14. निम्न में कौन-सा समान्तर चतुर्भुज जिसके विकर्ण $\vec{d}_1=3\hat{i}+\hat{j}-2\hat{k}$ और $\vec{d}_2=\hat{i}-3\hat{j}+4\hat{k}$ है के क्षेत्रफल के बराबर है

The area of parallelogram having diagouals $\vec{d}_1=3\hat{i}+\hat{j}-2\hat{k}$ and $\vec{d}_2=\hat{i}-3\hat{j}+4\hat{k}$ is equal to which of the following

(A) $10\sqrt{3}$ (B) 9 (C) 8 (D) $5\sqrt{3}$

15. यदि $\left(2\hat{i}+6\hat{j}+14\hat{k}\right)\times\left(\hat{i}-\lambda\hat{j}+7\hat{k}\right)=0$ तो λ का मान क्या होगा?

If $\left(2\hat{i}+6\hat{j}+14\hat{k}\right)\times\left(\hat{i}-\lambda\hat{j}+7\hat{k}\right)=0$, then what will be value of λ.

(A) 3 (B) 0 (C) –3 (D) ±3

16. यदि $\vec{a}=2\hat{i}+\hat{j}+3\hat{k}$ और $\vec{b}=3\hat{i}+5\hat{j}-2\hat{k}$ तो निम्न में कौन-सा $\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|$ का मान है।

If $\vec{a}=2\hat{i}+\hat{j}+3\hat{k}$ and $\vec{b}=3\hat{i}+5\hat{j}-2\hat{k}$ then which of the following is value of $\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|$

(A) $\sqrt{507}$ (B) $\sqrt{501}$ (C) 1 (D) None of these

17. यदि $\left(\vec{a}-\vec{b}\right)\cdot\left(\vec{a}+\vec{b}\right)=0$ तो निम्न में कौन-सा सत्य है।

If $\left(\vec{a}-\vec{b}\right)\cdot\left(\vec{a}+\vec{b}\right)=0$, then which of the following is true

(A) $\vec{a}$ and $\vec{b}$ are perpendicular (B) $\vec{a}$ and $\vec{b}$ are parallel

(C) $\left|\vec{a}\right|=\left|\vec{b}\right|$ (D) None of these

18. निम्न में कौन-सा $\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)^2+\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)^2$ के बराबर है

Which of the following is equal to $\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)^2+\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)^2$

(A) $2\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)$ (B) a^2b^2 (C) $\frac{\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)}{2}$ (D) $\frac{\vec{a}\times\vec{b}}{2}$

19. निम्न में कौन-सा $\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)^2$ के बराबर है।

Which of the following is equal to $\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)^2$

(A) $\begin{vmatrix} \vec{a}\cdot\vec{a} & \vec{a}\cdot\vec{b} \\ \vec{a}\cdot\vec{b} & \vec{b}\cdot\vec{b} \end{vmatrix}$ (B) $\begin{vmatrix} \vec{a}\cdot\vec{b} & \vec{b}\cdot\vec{a} \\ \vec{a}\cdot\vec{a} & \vec{b}\cdot\vec{b} \end{vmatrix}$ (C) $\begin{vmatrix} \vec{a}\cdot\vec{a} & \vec{a}\cdot\vec{b} \\ \vec{a}\cdot\vec{b} & \vec{b}\cdot\vec{b} \end{vmatrix}^2$ (D) None of these

20. $\int_1^4 x\sqrt{x}dx$ का मान बराबर है।

The value of $\int_1^4 x\sqrt{x}dx$ is equal to

(A) $12\cdot 8$ (B) $12\cdot 4$ (C) 7 (D) None of these

21. $\int\frac{dx}{4+x^2}$ बराबर है (equal to)

(A) $\tan^{-1}\frac{x}{3}+c$ (B) $\frac{1}{3}\tan^{-1}\frac{x}{3}+c$ (C) $\frac{1}{3}\tan^{-1}\frac{x}{3}+c$ (D) $3\tan^{-1}\frac{x}{3}+c$

22. $\int\frac{\log x}{x}dx$ बराबर है (equal to)

(A) $\frac{1}{2}(\log x)^2+c$ (B) $-\frac{1}{2}(\log x)^2+c$ (C) $\frac{2}{x^2}+c$ (D) None of these

23. बिन्दु (1,0,2) का स्थानिक सदिश है।

The position vector of the point (1,0,2) is

(A) $\hat{i}+\hat{j}+2\hat{k}$ (B) $\hat{i}+2\hat{j}$ (C) $\hat{i}+2\hat{k}$ (D) None of these

24. अवकल समीकरण $\frac{d^2y}{dx^2}+x^3\cdot\left(\frac{dy}{dx}\right)^3=x^4$ की कोटि निम्न में कौन-सा है?

The order of the differential equation $\frac{d^2y}{dx^2}+x^3\cdot\left(\frac{dy}{dx}\right)^3=x^4$ is which of the following.

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4

25. निम्न में कौन-सा अवकल समीकरण $\frac{dy}{dx}+Py=Q$, (जहाँ P और Q, x का फलन है) का समाकलन गुणांक है।

Which of the following is integrating factor of differential equation $\frac{dy}{dx}+Py=Q$, where P and Q are function of x.

(A) $e^{\int Pdx}$ (B) $e^{\int P}\cdot dx$ (C) $e^{-\int Pdx}$ (D) None of these

26. The distance of the point $(2, -3, -1)$ from the plane $2x - 3y + 6z + 7 = 0$ is
तल $2x - 3y + 6z + 7 = 0$ से बिंदु $(2, -3, -1)$ की दूरी है।

(A) 9 (B) 3 (C) 2 (D) $\frac{1}{5}$

27. यदि A और B दो घटनाएँ इस प्रकार है कि $P(A) \neq 0$ और $P\left(\frac{B}{A}\right) = 1$ तो निम्न में कौन-सा कथन सत्य है।

If A and B are two events such that $P(A) \neq 0$ and $P\left(\frac{B}{A}\right) = 1$ then which of the following is true.

(A) $B \subset A$ (B) $B = \phi$ (C) $A \subset B$ (D) $A \cap B = \phi$

28. निम्न में कौन-सा समघातीय अवकल समीकरण नहीं है।
Which of the following is not a hamogenous differential equation.

(A) $y^2dx + (x^2 + xy)dy = 0$ (B) $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} - \frac{y^3}{x^3}$

(C) $(x - y)dy + y^2dx = 0$ (D) $\frac{dy}{dx} = \sin\frac{y}{x}$

29. यदि A और B दो स्वतंत्र घटनाएँ है तो $P\left(\frac{\overline{A}}{\overline{B}}\right)$ बराबर है।

If A and B are two independent events, then $P\left(\frac{\overline{A}}{\overline{B}}\right)$ equal to

(A) $1 - P\left(\frac{A}{\overline{B}}\right)$ (B) $1 - P\left(\frac{\overline{A}}{B}\right)$ (C) $1 - P(B)$ (D) $1 - P(A)$

30. $\vec{a}$ का $\vec{b}$ पर प्रक्षेप निम्न में किसके द्वारा दिया जा सकता है।

Projection of $\vec{a}$ on $\vec{b}$ is given by which of the following

(A) $\frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}|}$ (B) $\frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|}$ (C) $\frac{\vec{a} \times \vec{b}}{|\vec{b}|}$ (D) $\frac{\vec{b} \times \vec{a}}{|\vec{a}|}$

31. रेखा $x = x_1, y = y_1$ है (The line $x = x_1, y = y_1$ is)

(A) parallel to x-axis (B) parallel to y-axis (C) parallel to z-axis (D) None of these

32. y-अक्ष का समीकरण है (Equation of y-axis are)

(A) $x = 0, y = 0$ (B) $x = 0, z = 0$ (C) $y = 0, z = 0$ (D) None of these

33. त्रिभुज का क्षेत्रफल जिसके शीर्ष (1,1,1), (–1,2,3) और (2,–1,3) है

The area of the triangle having vertices (1,1,1), (–1,2,3) and (2,–1,3) is

(A) 1 (B) $\frac{9}{2}$ (C) $\frac{5}{2}$ (D) $\frac{1}{2}$

34. समीकरण $\vec{r} = \lambda \vec{i} + N \vec{j}$, तल को निर्धारित करता है।

The equation $\vec{r} = \lambda \vec{i} + N \vec{j}$ represents the plane

(A) $x = 0$ (B) $z = 0$ (C) $y = 0$ (D) None of these

35. अवकल समीकरण $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} + \frac{f\left(\frac{y}{x}\right)}{f'\left(\frac{y}{x}\right)}$ का हल है।

The solution of differential equation $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} + \frac{f\left(\frac{y}{x}\right)}{f'\left(\frac{y}{x}\right)}$ is

(A) $f\left(\frac{y}{x}\right) = kx$ (B) $f\left(\frac{y}{x}\right) = ky$ (C) $xf\left(\frac{y}{x}\right) = k$ (D) $yf\left(\frac{y}{x}\right) = k$

36. यदि $y = e^{\frac{1}{x}}$, तो $\frac{dy}{dx}$ का मान है।

If $y = e^{\frac{1}{x}}$, then $\frac{dy}{dx}$ equal to

(A) $\frac{1}{x}\left(e^{\frac{1}{x}-1}\right)$ (B) $\frac{-e^{\frac{1}{x}}}{x^2}$ (C) $e^{\frac{1}{x}} \cdot \log x$ (D) None of these

37. $\int_0^a \left[f(x) + f(-x)\right] dx =$

(A) 0 (B) $2\int_0^a f(x)dx$ (C) $\int_{-a}^a f(x)dx$ (D) None of these

38. यदि $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$, तो $|2A|$ का मान है।

If $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$, then value of $|2A|$ equal to

(A) $2|A|$ (B) $4|A|$ (C) $8\,|A|$ (D) None of these

39. यदि $A=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}$ तो AB बराबर है

If $A=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}$, then AB equal to

(A) $\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}$ (B) $\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}$ (C) $\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$ (D) None of these

40. $\int\frac{dx}{\sqrt{x}}$ का मान बराबर है

The value of $\int\frac{dx}{\sqrt{x}}$ is equal to

(A) $\sqrt{x}+k$ (B) $2\sqrt{x}+k$ (C) $x+k$ (D) $\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}+k$

ANSWERS

1.	(B)	**2.**	(C)	**3.**	(C)	**4.**	(B)	**5.**	(A)	**6.**	(C)	**7.**	(B)	**8.**	(C)	**9.**	(C)	**10.**	(C)
11.	(A)	**12.**	(B)	**13.**	(A)	**14.**	(B)	**15.**	(C)	**16.**	(A)	**17.**	(A)	**18.**	(B)	**19.**	(A)	**20.**	(B)
21.	(B)	**22.**	(A)	**23.**	(C)	**24.**	(B)	**25.**	(A)	**26.**	(C)	**27.**	(A)	**28.**	(C)	**29.**	(A)	**30.**	(B)
31.	(C)	**32.**	(B)	**33.**	(B)	**34.**	(B)	**35.**	(A)	**36.**	(B)	**37.**	(C)	**38.**	(B)	**39.**	(B)	**40.**	(B)

खण्ड – II (गैर – वस्तुनिष्ठ प्रश्न)

SECTION-II (NON-OBJECTIVE TYPE QUESTIONS)

समय : 2 घंटा 05 मिनट **पूर्णांक : 60**
Time : 2 Hours 05 Min. **Full Marks : 60**

लघु उत्तरीय प्रश्न
(Short Answer Type Question)

प्रश्न संख्या 1 से 8 तक लघु उत्तरीय प्रकार के हैं। प्रत्येक के लिए 4 अंक निर्धारित है। **8 × 4 = 32**
Question Nos. 1 to 8 are of short answer type. Each question carries 4 marks. **8 × 4 = 32**

1. दिखाइए कि बिदु $(a, 0), (0,b)$ और $(1,1)$ एक रैखिक है यदि $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=1$

Show that the points $(a, 0), (0,b)$ and $(1,1)$ are collinear if $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=1$

2. यदि $x^y = e^{x-y}$, सिद्ध करें $\frac{dy}{dx}=\frac{\log x}{(1+\log x)^2}$

If $x^y = e^{x-y}$, prove that $\frac{dy}{dx}=\frac{\log x}{(1+\log x)^2}$

3. $x=0$ पर $f(x)=\begin{cases} x\sin\frac{1}{x}, & x\neq 0 \\ 0 & , x=0 \end{cases}$ के अवकलनता की जाँच करें।

Check the differentiability of $f(x)=\begin{cases} x\sin\frac{1}{x}, & x\neq 0 \\ 0 & , x=0 \end{cases}$ at $x=0$

4. वक्र $x^2+y^2-2x-4y+1=0$ के किस बिन्दु पर स्पर्श रेखा x-अक्ष के समानान्तर है।
At what points on the curve $x^2+y^2-2x-4y+1=0$ is the tangent parallel to x-axis.

5. यदि $\begin{bmatrix}4\\1\\3\end{bmatrix}\cdot X=\begin{bmatrix}-4 & 8 & 4\\-1 & 2 & 1\\-3 & 6 & 3\end{bmatrix}$, X ज्ञात करें।

If $\begin{bmatrix}4\\1\\3\end{bmatrix}\cdot X=\begin{bmatrix}-4 & 8 & 4\\-1 & 2 & 1\\-3 & 6 & 3\end{bmatrix}$, Find X.

6. बिंदु (1,2,5) की दूरी तल $\vec{r}\cdot\left(\hat{i}+\hat{j}+\hat{k}\right)+17=0$ से ज्ञात करें।

Find the distance of the point (1,2,5) from the plane $\vec{r}\cdot\left(\hat{i}+\hat{j}+\hat{k}\right)+17=0$.

7. यदि $\vec{a}=2\hat{i}-\hat{j}+3\hat{k}$ और $\vec{b}=3\hat{i}+\hat{j}-2\hat{k}$ तो सदिश $\vec{a}+\vec{b}$ और $\vec{a}-\vec{b}$ के बीच का कोण ज्ञात करें।

Find the angle between the vector $\vec{a}+\vec{b}$ and $\vec{a}-\vec{b}$. If $\vec{a}=2\hat{i}-\hat{j}+3\hat{k}$ and $\vec{b}=3\hat{i}+\hat{j}-2\hat{k}$.

8. छः सिक्कों को एक साथ उछाला जाता है। (i) कोई हेड नही (ii) कम से कम एक हेड आने की प्रायिकता ज्ञात करें।

Six coin are tossed simultanously. Find the probability of getting (i) no head (ii) at least one head.

दीर्घ उत्तरीय प्रश्न
(Long Answer Type Question)

प्रश्न संख्या 9 से 12 तक दीर्घ उत्तरीय प्रकार के हैं। प्रत्येक के लिए 7 अंक निर्धारित है। **4 × 7 = 28**

Question Nos. 9 to 12 are of short answer type. Each question carries 7 marks. **4 × 4 = 28**

9. दो वृत $x^2+y^2=1$ और $(x-1)^2+y^2=1$ के बीच घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात करें।

Find the area of the region enclosed between the two circle $x^2+y^2=1$ and $(x-1)^2+y^2=1$.

10. रेखाएँ $\vec{r}=3\hat{i}+8\hat{j}+3\hat{k}+\lambda\left(3\hat{i}-\hat{j}+\hat{k}\right)$ और $\vec{r}=-3\hat{i}-7\hat{j}+6\hat{k}+\mu\left(-3\hat{i}+2\hat{j}+4\hat{k}\right)$ के बीच लघुतम दूरी और लघुतम दूरी वाले रेखा का सदिश समीकरण ज्ञात करें।

Find the shortest distance and the vector equation of the line of shortest distance between the lines given by

$\vec{r}=3\hat{i}+8\hat{j}+3\hat{k}+\lambda\left(3\hat{i}-\hat{j}+\hat{k}\right)$ and $\vec{r}=-3\hat{i}-7\hat{j}+6\hat{k}+\mu\left(-3\hat{i}+2\hat{j}+4\hat{k}\right)$.

11. ज्ञात करें (Evaluate) : $\int_0^{\frac{\pi}{4}} 2\tan^3 x\,dx$

12. निम्नलिखित LPP को आलेखीय हल करें।

अधिकतम $z = 5x + 3y$ जबकि

$3x + 5y \le 15$

$5x + 2y \le 10$

$x, y \ge 0$

Solve the following LPP graphically

Maximize $z = 5x + 3y$ subject to

$3x + 5y \le 15$

$5x + 2y \le 10$

$x, y \ge 0$

ANSWERS

1. Given points $(a,0)$, $(0,b)$ and $(1,1)$ are collinear

then $\begin{vmatrix} a & 0 & 1 \\ 0 & b & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$

$\Leftrightarrow \quad a(b-1) - 0(0-1) + 1(0-b) = 0$

$\Leftrightarrow \quad ab - a - b = 0$

$\Leftrightarrow \quad a + b = ab$

$\Leftrightarrow \quad \frac{1}{b} + \frac{1}{a} = 1$

$\Leftrightarrow \quad \frac{1}{a} + \frac{1}{a} = 1$

Hence, points $(a,0)$, $(0,b)$, $(1,1)$ are collinear if $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = 1$.

2. Given, $x^y = e^{x-y}$

Taking Lagarithm, we get $y\log x = (x-y)\log e^e$

$\Rightarrow \quad y\log x = x - y$

$\Rightarrow \quad y(\log x + 1) = x$

$\therefore \quad y = \frac{x}{1+\log x}$

Differentiating w.r.t. x, we have

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(1+\log x)\cdot 1 - x\left(0 + \frac{1}{x}\right)}{(1+\log x)^2} = \frac{\log x}{(1+\log x)^2}$$

3. Differentiability of $f(x)$ at $x = 0$

$$f'(0-0) = \lim_{h\to 0-0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h\to 0-0} \frac{f(h) - f(0)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0-0} \frac{h\sin\frac{1}{h} - 0}{h} = \lim_{h\to 0-0} \sin\frac{1}{h}$$

Here, $\lim_{h\to 0} \sin\frac{1}{h}$ does not exist.

So, given $f(x)$ is not differentiable at $x = 0$

4. Given Curve is $x^2 + y^2 - 2x - 4y + 1 = 0$ …(i)

Differentiating (i) w.r.t. x, we have

$$2x + 2y \cdot \frac{dy}{dx} - 2 - 4\frac{dy}{dx} = 0$$

$$\Rightarrow \quad (y-2)\frac{dy}{dx} = 1 - x$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1-x}{y-2}$$

For tangent to be paralll to y-axis

$\frac{dy}{dx}$ is undefind i.e. ∞

so, $\quad \frac{1-x}{y-2} = \infty$

$\Rightarrow \quad y - 2 = 0$

$\Rightarrow \quad y = 2$

Put $y = 2$ in (i), we get

$$x^2 + 4 - 2x - 8 + 1 = 0$$

$\Rightarrow \quad x^2 - 2x - 3 = 0$

$\Rightarrow \quad x = 3, -1$

Hence, At (3,2) and (–1,2) the tagents to curve (i) are parallel to y-axis.

5. Let $A = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$ and $B = \begin{bmatrix} -4 & 8 & 4 \\ -1 & 2 & 1 \\ -3 & 6 & 3 \end{bmatrix}$

Thus, given that $AX = B$

We have to find X

Now, $Ax = B$

$$\Rightarrow \quad \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} \cdot [a\ b\ c] = \begin{bmatrix} -4 & 8 & 4 \\ -1 & 2 & 1 \\ -3 & 6 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad \begin{bmatrix} 4a & 4b & 4c \\ a & b & c \\ 3a & 3b & 3c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 8 & 4 \\ -1 & 2 & 1 \\ -3 & 6 & 3 \end{bmatrix}$$

By Equality of two matrix, we have

$4a = -4 \Rightarrow a = -1$

$4b = 8 \Rightarrow b = 2$

$4c = 4 \Rightarrow c = 4$

Hence $X = [abc] = [-1, 2, 1]$

6. The equation of plane is $\vec{r}\cdot\vec{n}=d$ where $\vec{n}=\hat{i}+\hat{j}+\hat{k}$ and $d=-17$

If a is the position vector of (1,2,5), then $\vec{a}=\hat{i}+2\hat{j}+5\hat{k}$

Now, distance of the point (1,2,5) from the plane

$$\vec{r}\cdot\vec{n}=d=\left|\frac{\vec{a}\cdot\vec{n}-d}{|\vec{n}|}\right|=\left|\frac{\left(\hat{i}+2\hat{j}+5\hat{k}\right)\cdot\left(\hat{i}+\hat{j}+\hat{k}\right)+17}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}}\right|=\left|\frac{1\times1+2\times1+5\times1+17}{\sqrt{3}}\right|=\frac{25}{\sqrt{3}}$$

7. If θ be the angle between two vector $\vec{u}$ and $\vec{v}$ then $\cos\theta=\dfrac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}|.|\vec{v}|}$

Let $\vec{u}=\vec{a}+\vec{b}$ and $\vec{v}=\vec{a}-\vec{b}$

where $\vec{a}=2\hat{i}-\hat{j}+3\hat{k}$ and $\vec{b}=3\hat{i}+\hat{j}-2\hat{k}$

So, $\vec{u}=5\hat{i}+0\hat{j}+\hat{k}$

$\vec{v}=-\hat{i}-2\hat{j}+5\hat{k}$

$\therefore\quad \vec{u}\cdot\vec{v}=\left(5\hat{i}+0\cdot\hat{j}+\hat{k}\right)\cdot\left(-\hat{i}-2\hat{j}+5\hat{k}\right)=5\times-1+0\times-2+1\times5=0$

and $|\vec{u}|=\sqrt{26},|\vec{v}|=\sqrt{30}$

$\therefore\quad \cos\theta=\dfrac{0}{|\vec{u}|.|\vec{v}|}=\dfrac{0}{\sqrt{26}\sqrt{30}}=0$

$\Rightarrow\quad \theta=\dfrac{\pi}{2}$

8. Let p = Probability of getting a head in the toss of a coin

$=\dfrac{1}{2}$

So, q = Prob. of not getting a head $=1-P=1-\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{2}$

Let X = Number of success in the experiment

So, X can take value 0,1,2,3,4,5,6 i.e. $n=6$

Now, $P(X=r)=n_{C_r}p^r\cdot q^{n-r}$

So, (i) P (no. head) $=P(X=0)=6_{C_0}\left(\dfrac{1}{2}\right)^{0}\cdot\left(\dfrac{1}{2}\right)^{6-0}=\dfrac{1}{64}$

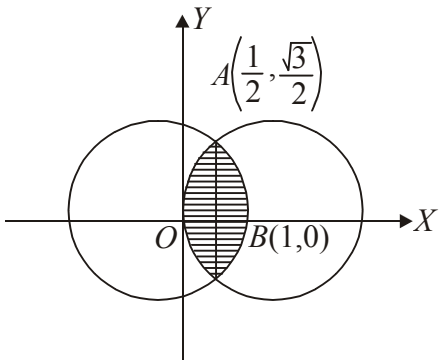
(ii) $P(\text{at least one head}) = 1 - P(X = 0) = 1 - \frac{1}{64} = -\frac{63}{64}$

9. Given circle are $x^2 + y^2 = 1$ …(i)

and $(x - 1)^2 + y^2 = 1$ …(ii)

Circle (i) has centre at (0,0) and radius 1 unit

Circle (ii) has centre at (1,0) and radius 1 unit



By (i) – (ii), we have

$2x - 1 = 0$

$\Rightarrow \quad x = \frac{1}{2}$

From (i), when $x = \frac{1}{2}, y^2 = \frac{3}{4}$

$\therefore \quad y = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$

So, Required Area = Shaded Region = 2 · area $OABO$

$$= 2\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} (x_1 - x_2)\, dy$$

$$= 2\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \left[\sqrt{1-y^2} - \left(1 - \sqrt{1-y^2}\right)\right] dy$$

$$= 4\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \sqrt{1-y^2}\, dy - 2\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} 1\, dy$$

$$= 4\left[\frac{y\sqrt{1-y^2}}{2} + \frac{1}{2}\sin^{-1} y\right]_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} - 2\left[y\right]_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

$$= 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{2} + \sin^{-1}\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - 0 - 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - 0\right)$$

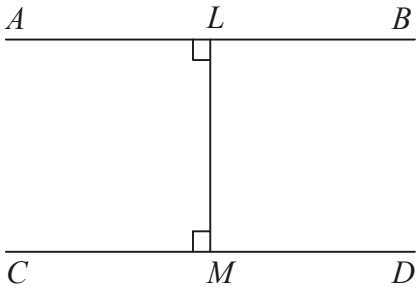
$$= \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{2\pi}{3} - \sqrt{3}$$

$$= \left(\frac{2\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \text{square. units}$$

10. Given lines are $\vec{r} = 3\hat{i} + 8\hat{j} + 3\hat{k} + \lambda\left(3\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}\right)$ …(i)

and $\vec{r} = -3\hat{i} - 7\hat{j} + 6\hat{k} + \mu\left(-3\hat{i} + 2\hat{j} + 4\hat{k}\right)$ …(ii)

Equation of lines (i) & (ii) in cartesian form are



$$AB : \frac{x-3}{3} = \frac{y-8}{-1} = \frac{z-3}{1} = \lambda$$

and $CD : \frac{x+3}{-3} = \frac{y+7}{2} = \frac{z-6}{4} = 4$

Let Co-ordinate of point L and M are

$L \equiv (3\lambda + 3, -\lambda + 8, \lambda + 3)$

$M \equiv (-3\mu - 3, 2\mu - 7, 4\mu + 6)$

D.C. of LM are $(-3\lambda + 3\mu + 6, -\lambda - 2\mu + 15, \lambda - 4\mu - 3)$

Since, $LM \perp AB$

$\therefore \quad 3(3\lambda + 3\mu + 6) - 1(-\lambda - 2\mu + 15) + 1(\lambda - 4\mu - 3) = 0$

$\Rightarrow \quad 11\lambda + 7\mu = 0$ …(iii)

Again, $LM \perp CD$

$\therefore \quad -3(3\lambda + 3\mu + 6) + 2(-\lambda - 2\mu + 15) + 4(\lambda - 4\mu - 3) = 0$

$\Rightarrow \quad -7\lambda - 29\mu = 0$ …(iv)

Solving (iii) and (iv) are, we get

$\lambda = 0, \mu = 0$

So, $L = (3,8,3)$ and $M = (-3, -7, 6)$

Hence, shortest distance

$$LM = \sqrt{(3+3)^2 + (8+7)^2 + (3-6)^2} = \sqrt{270} = 3\sqrt{30} \text{ unit}$$

Also, vector equation of LM is $\vec{r} = \left(3i + 8j + 3k\right) + t\left(6i + 15j - 3k\right)$

11. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} 2\tan^3 x dx = 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x \cdot \tan^2 x dx = 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x\left(\sec^2 x - 1\right)dx$

$= 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x \cdot \sec^2 x dx - 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x dx = 2I_1 - 2I_2$

where $I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x \cdot \sec^2 x dx$ and $I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x dx$

To find I_1

Put $t = \tan x \Rightarrow dt = \sec^2 x dx$

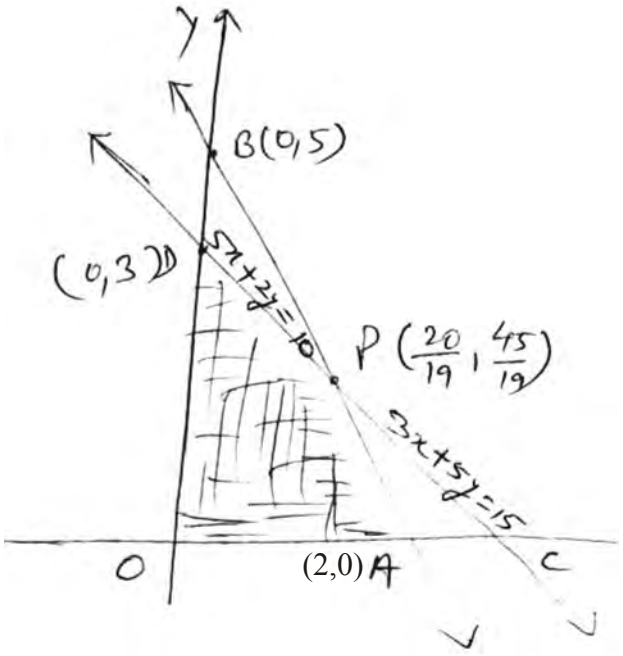
When $x = \frac{\pi}{4}$, $t = \tan x = 1$ and when $x = 0$, $t = \tan x = 0$

$\therefore \quad I_1 = \int_0^1 t\,dt = \left[\frac{t^2}{2}\right]_0^1 = \frac{1}{2}[1-0] = \frac{1}{2}$

and $I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x\,dx = \left[-\log|\cos x|\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = -\left[\log\frac{1}{\sqrt{2}} - \log 1\right] = -\left[\log 1 - \log\sqrt{2} - \log 1\right] = \log\sqrt{2} = \frac{1}{2}\log 2$

Hence $\int_0^{\frac{\pi}{4}} 2\tan^3 x\,dx = 2\times\frac{1}{2} - 2\times\frac{1}{2}\log 2 = 1 - \log 2$

12. We first draw the graph of lines $3x + 5y = 15$, $5x + 2y = 10$
The shaded region is the require feasible region.



i.e. *OAPDO* is the feasible region vertices of the feasible region are $O(0,0)$, $A(2,0)$, $P\left(\frac{20}{19},\frac{45}{19}\right)$ and $D(0,3)$

Here, we get thepoints by solving the intersecting lines.
Given, $Z = 5x + 3y$
Now, At $O(0,0)$, $z = 5 \times 0 + 3 \times 0 = 0$
$A(2,0)$, $z = 5 \times 2 + 3 \times 0 = 10$

$P\left(\frac{20}{19},\frac{45}{19}\right), z = 5\times\frac{20}{19} + 3\times\frac{45}{19} = \frac{235}{19}$

$D(0,3)$, $z = 5 \times 0 + 3 \times 3 = 9$

Clearly, z is maximum at $P\left(\frac{20}{19},\frac{45}{19}\right)$

Hence $x = \frac{20}{19}, y = \frac{45}{19}$ is the optimal solution of given LPP.

The optimal value of $z = \frac{235}{19}$.

SET-6

समय : 1 घंटा 10 मिनट | पूर्णांक : 40

Time : 1 Hours 10 Min. | **Full Marks : 40**

खण्ड – I (वस्तुनिष्ठ प्रश्न)

SECTION-I (OBJECTIVE TYPE QUESTIONS)

प्रश्न संख्या 1 से 40 तक निम्न में दिए गए चार विकल्पों में से एक ही उत्तर सही है। प्रत्येक प्रश्न के सही उत्तर को उत्तर तालिका में चिह्नित करें। **40 × 1 = 40**

From Question No. 1 to 40 there is one correct answer. In each question you have to mark that correct option from given options. **40 × 1 = 40**

1. समीकरण युग्म $x + y = 1, ax + y = a$ के अनन्त हल है तो a = ...

Th system of equations $x + y = 1, ax + y = a$ has infinitely many solutions, then a = ...

(A) –1 (B) 0 (C) 2 (D) 1

2. निम्न में कौन-सा सत्य है?

Which of the following is true ?

(A) $(AB)^{-1} = A^{-1}B^{-1}$ (B) $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ (C) $(AB)^{-1} = (BA)^{-1}$ (D) None of these

3. सारणिक $\begin{vmatrix} 1+a & 1 & 1 \\ 1 & 1+a & 1 \\ 1 & 1 & 1+a \end{vmatrix} = 0$ तो a का मान है?

The value of the determinant $\begin{vmatrix} 1+a & 1 & 1 \\ 1 & 1+a & 1 \\ 1 & 1 & 1+a \end{vmatrix}$ is zero, then value of a is

(A) –3 (B) 0 (C) 1 (D) 3

4. $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ एकतलीय होगे यदि

$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ will be coplanar, if

(A) $\left(\vec{a} \cdot \vec{b}\right)\vec{c} = 0$ (B) $\vec{a} \cdot \left(\vec{b} \times \vec{c}\right) = 0$ (C) $\vec{a} \times \left(\vec{b} \times \vec{c}\right) = 0$ (D) $\vec{a} \cdot \left(\vec{b} + \vec{c}\right) = 0$

5. $\sin\left(\frac{\pi}{3} - \sin^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)\right)$ का मान बराबर है?

The value of $\sin\left(\frac{\pi}{3} - \sin^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)\right)$ is equal to

(A) $\frac{1}{2}$ (B) $\frac{1}{3}$ (C) $\frac{1}{4}$ (D) 1

6. यदि $\sin^{-1}x + \sin^{-1}y = \pi$ तो $(x+y)^2$ का मान है।

If $\sin^{-1}x + \sin^{-1}y = \pi$ then the value of $(x+y)^2$ is

(A) 4 (B) 3 (C) –4 (D) –3

7. यदि फलन $f(x) = \begin{cases} \sin\frac{1}{x}, x \neq 0 \\ K, \quad x = 0 \end{cases}$, $x = 0$ पर संतत है तो K का मान है।

If the function $f(x) = \begin{cases} \sin\frac{1}{x}, x \neq 0 \\ K, \quad x = 0 \end{cases}$ is continuous at $x = 0$, then value of K is

(A) 8 (B) 1 (C) –1 (D) None of these

8. यदि एक रेखा x, y और z-अक्ष के साथ क्रमशः α, β, γ कोण बनाती है तो $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma$ का मान है।

If a line makes angles α, β, γ with the x, y and z-axis respectively, then value of $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma$ is

(A) 1 (B) –1 (C) 2 (D) –2

9. रेखाएँ $\vec{r} = \vec{a_1} + \vec{b_1}t$ और $\vec{r} = \vec{a_2} + \vec{b_2}t$ के बीच न्यूनतम दूरी है।

The shortest distance between the lines $\vec{r} = \vec{a_1} + \vec{b_1}t$ and $\vec{r} = \vec{a_2} + \vec{b_2}t$ is

(A) $\left[\vec{a_2} - \vec{a_1}\ \vec{b_1}\ \vec{b_2}\right]$ (B) $\frac{\left[\vec{a_2} - \vec{a_1}\ \vec{b_1}\ \vec{b_2}\right]}{\left|\vec{b_1} \times \vec{b_2}\right|}$ (C) $\frac{\left[\vec{a_1}\ \vec{a_2}\ \vec{b_2} - \vec{b_1}\right]}{\left|\vec{a_1} \times \vec{a_2}\right|}$ (D) None of these

10. $\sin^{-1}\left(\sin\frac{2\pi}{3}\right) = \ldots\ldots$

(A) $\frac{\pi}{3}$ (B) $\frac{2\pi}{3}$ (C) $\frac{\pi}{6}$ (D) None of these

11. अवकल समीकरण $\frac{d^2y}{dx^2} = \left\{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right\}^{\frac{3}{2}}$ के कोटि और घात क्रमशः है?

The order and degree of the differential equation $\frac{d^2y}{dx^2} = \left\{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right\}^{\frac{3}{2}}$ are respectively

(A) $\frac{3}{2}, 2$ (B) 2,2 (C) 2,3 (D) 3,4

12. यदि $\vec{a}\cdot\vec{b}=8$ और $\vec{b}=2\hat{i}+6\hat{j}+3\hat{k}$ तो $\vec{b}$ पर $\vec{a}$ का प्रक्षेप होगा?

The projection of $\vec{a}$ on $\vec{b}$ if $\vec{a}\cdot\vec{b}=8$ and $\vec{b}=2\hat{i}+6\hat{j}+3\hat{k}$ will be

(A) $\frac{3}{7}$ (B) $\frac{7}{3}$ (C) $\frac{8}{7}$ (D) $\frac{7}{8}$

13. यदि एक सदिश a का परिमाप 'a' है और λ एक अदिश है तो $\lambda\vec{a}$ एक इकाई सदिश है यदि

If $\vec{a}$ is a vector of magnitude a and λ is a scalar, then $\lambda\vec{a}$ is a unit vector if

(A) $\lambda = 1$ (B) $\lambda = -1$ (C) $a = |\lambda|$ (D) $a = \frac{1}{|\lambda|}$

14. यदि 'θ' सदिश $\vec{a}$ और $\vec{b}$ के बीच का कोण है जबकि $\left|\vec{a}\times\vec{b}\right| = \left|\vec{a}\cdot\vec{b}\right|$ तो θ का मान है?

If 'θ' is the angle between the vectors $\vec{a}$ and $\vec{b}$ such that $\left|\vec{a}\times\vec{b}\right| = \left|\vec{a}\cdot\vec{b}\right|$ then value of θ is

(A) 0º (B) 45º (C) 120º (D) 180º

15. यदि $\int_0^a f(x)dx = 10$, तो $\int_0^a f(a-x)dx = \ldots\ldots$

If $\int_0^a f(x)dx = 10$, then $\int_0^a f(a-x)dx = \ldots\ldots$

(A) 10 (B) 0 (C) –10 (D) None of these

16. अवकल समीकरण $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - x\frac{dy}{dx} + y = 0$ का एक हल है?

A solution of the differential equation $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - x\frac{dy}{dx} + y = 0$ is

(A) $y = 2$ (B) $y = 2x$ (C) $y = 2x - 4$ (D) $y = 2x^2 - 4$

17. $\int_{-1}^{1} |x|dx = \ldots\ldots$

(A) 1 (B) 0 (C) 2 (D) –1

18. समानान्तर तल $x + 2y - 3z = 2$ और $2x + 4y - 6z + 7 = 0$ के बीच की दूरी है?

The distance between the parallel planes $x + 2y - 3z = 2$ and $2x + 4y - 6z + 7 = 0$ is

(A) $\frac{2}{\sqrt{14}}$ (B) $\frac{11}{\sqrt{56}}$ (C) $\frac{7}{\sqrt{56}}$ (D) None of these

19. यदि $P(A) = 0.2,\ P\left(\frac{B}{A}\right) = 0.3$ तो $P(A \cap B)$ बराबर है।

If $P(A) = 0.2,\ P\left(\frac{B}{A}\right) = 0.3$ then $P(A \cap B)$ equal to

(A) 0.6 (B) 0.006 (C) 0.06 (D) None of these

20. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 + x^2}} = \ldots\ldots\ldots\ldots$

(A) $\log\left(x + \sqrt{x^2 + a^2}\right)$ (B) $\log\left(x - \sqrt{x^2 - a^2}\right)$ (C) $\log\left(x + \sqrt{x^2 - a^2}\right)$ (D) None of these

21. $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ एक वर्ग आव्यूह है यदि

$A = [a_{ij}]_{m \times n}$ is a square matrix if

(A) $m > n$ (B) $m = n$ (C) $m < n$ (D) None of these

22. $\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx = \ldots\ldots\ldots$

(A) $e^{\sqrt{x}} + c$ (B) $\frac{1}{2}e^{\sqrt{x}} + c$ (C) $2e\sqrt{x} + c$ (D) None of these

23. अवकल समीकरण $\frac{dy}{dx} + y = \frac{1+y}{x}$ का समाकलन गुणांक है।

The integrating factor of the differential equation $\frac{dy}{dx} + y = \frac{1+y}{x}$ is

(A) e^x (B) xe^x (C) $\frac{e^x}{x}$ (D) $\frac{x}{e^x}$

24. $\int \frac{dx}{1 + \tan x} = \ldots\ldots\ldots$

(A) $\log(x + \sin x)$ (B) $\log(\sin x + \cos x)$

(C) $2\sec^2 \frac{x}{2}$ (D) $\frac{1}{2}\left[\left(x + \log\left(\sin x + \cos x\right)\right)\right]$

25. $\int \frac{e^{\log\sqrt{x}}}{x} = \ldots\ldots\ldots$

(A) $2\sqrt{x} + c$ (B) $\frac{\sqrt{x}}{2} + c$ (C) $\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + c$ (D) None of these

26. यदि $f : R \to R$ एक सम्बन्ध है और $f = \{(a,a), (b,b), (c,c)\}$ तो निम्न में कौन-सा सत्य है?

If $f : R \to R$ be a relation given by $f = \{(a,a), (b,b), (c,c)\}$ then which of the following is true ?

(A) f is reflexive (B) f is symmetric (C) (A) and (B) both (D) None of these

27. $\frac{d}{dx}\left(a^x\right) = \ldots\ldots\ldots$

(A) $a^x \cdot \log a$ (B) $a^{\log a} \cdot x$ (C) $\frac{a^x}{\log a}$ (D) None of these

28. यदि $y = a^x$, तो $\frac{d^2y}{dx^2}$ बराबर है।

If $y = a^x$, then $\frac{d^2y}{dx^2}$ is equal to

(A) $a^x \log a$ (B) $a^x \cdot (\log a)^2$ (C) $(a^x)^2 \cdot \log a$ (D) None of these

29. यदि $x + y = k$, $y^2 = 12x$ पर अभिलम्ब है तो k का मान है।

If $x + y = k$ is a normal to $y^2 = 12x$, then value of k of is

(A) 3 (B) 9 (C) –9 (D) –3

30. $y = x^4 + 1$ का निम्नतम मान है।

Minimum value of $f = x^4 + 1$ is

(A) 1 (B) 5 (C) 4 (D) 3

31. यदि A एक 2×2 सारणिक है जिसका मान 5 है, तो $|2A|$ का मान होगा।

If A is a 2×2 determinant having value 5, then value of $|2A|$ will be

(A) 10 (B) 25 (C) 20 (D) None of these

32. $\frac{d}{dx}\left(\sin^{-1} x + \cos^{-1} x\right) = \ldots\ldots$

(A) 1 (B) $\frac{\pi}{2}$ (C) 0 (D) None of these

33. बिंदु $A(2,–4,5)$ और $B\,(1, –1, 3)$ को मिलाने वाली रेखा का दिक्अनुपात है।

The direction ratio of the line joining the points $A(2, –4,5)$ & $B(1,–1,3)$ are

(A) $(1, –3,2)$ (B) $(–3,1,2)$ (C) $(2,1,–3)$ (D) None of these

34. रेखा $\frac{x-2}{3} = \frac{y-3}{4} = \frac{z-4}{5}$ निम्न में से किस तल के समानान्तर है।

The line $\frac{x-2}{3} = \frac{y-3}{4} = \frac{z-4}{5}$ is parallel to which of the following plane.

(A) $3x + 4y + 5z = 7$ (B) $2x + 3y + 4z = 0$

(C) $x + y – z = 0$ (D) $2x + y – 2z = 0$

35. तल $x = 0$ और $y = 0$ है।

The plane $x = 0$ and $y = 0$ is

(A) parallel (B) perpendicular to each other

(C) Intersect in x-axis (D) None of these

36. रेखा जिसका सदिश समीकरण $\vec{r} = \left(2\vec{i} + \vec{j} - 3\vec{k}\right) + t\left(\vec{i} - 3\vec{j} + 2\vec{k}\right)$ है का कार्तीय समीकरण होगा।

(A) $\frac{x-z}{1} = \frac{y-1}{-3} = \frac{z+3}{2}$ (B) $\frac{z-2}{-1} = \frac{y-1}{3} = \frac{z-3}{2}$

(C) $\frac{z-2}{1}=\frac{y-1}{3}=\frac{z-2}{2}$ (D) None of these

37. $\int_1^e \frac{1+\log x}{x}dx = \ldots\ldots\ldots$

(A) $\frac{3}{2}$ (B) $\frac{1}{2}$ (C) e (D) $\frac{1}{e}$

38. If $y = \tan^2 x$, then $\frac{dy}{dx} = \ldots\ldots\ldots$

(A) $x^3 \cdot \cos(x^3)$ (B) $\sec^2 x$ (C) $2\tan x \cdot \sec^2 x$ (D) None of these

39. तल $2x + 5y - 6z + 3 = 0$ के समानान्तर तल का समीकरण होगा।

The equation of plane parallel to the plane $2x + 5y - 6z + 3 = 0$ will be

(A) $3x + 5y - 6z + 3 = 0$ (B) $2x - 5y - 6z + 3 = 0$

(C) $2x + 5y - 6z + k = 0$ (D) None of these

40. $\text{cosec}^{-1}(2)$ का मुख्य मान है।

The principal value of $\text{cosec}^{-1}(2)$ is

(A) $\frac{\pi}{3}$ (B) $\frac{\pi}{6}$ (C) $\frac{2\pi}{3}$ (D) $\frac{5\pi}{6}$

ANSWERS

1.	(D)	**2.**	(B)	**3.**	(A)	**4.**	(B)	**5.**	(D)	**6.**	(A)	**7.**	(D)	**8.**	(A)	**9.**	(B)	**10.**	(A)
11.	(B)	**12.**	(C)	**13.**	(D)	**14.**	(B)	**15.**	(A)	**16.**	(C)	**17.**	(A)	**18.**	(B)	**19.**	(C)	**20.**	(A)
21.	(B)	**22.**	(C)	**23.**	(C)	**24.**	(D)	**25.**	(A)	**26.**	(B)	**27.**	(A)	**28.**	(B)	**29.**	(B)	**30.**	(A)
31.	(C)	**32.**	(C)	**33.**	(A)	**34.**	(D)	**35.**	(B)	**36.**	(A)	**37.**	(A)	**38.**	(C)	**39.**	(C)	**40.**	(B)

खण्ड – II (गैर – वस्तुनिष्ठ प्रश्न)

SECTION-II (NON-OBJECTIVE TYPE QUESTIONS)

समय : 2 घंटा 05 मिनट **पूर्णांक : 60**
Time : 2 Hours 05 Min. **Full Marks : 60**

लघु उत्तरीय प्रश्न
(Short Answer Type Question)

प्रश्न संख्या 1 से 8 तक लघु उत्तरीय प्रकार के हैं। प्रत्येक के लिए 4 अंक निर्धारित है। **8 × 4 = 32**
Question Nos. 1 to 8 are of short answer type. Each question carries 4 marks. **8 × 4 = 32**

1. यदि $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$ तो A^{-1} ज्ञात करें।

If $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$ find A^{-1}.

2. यदि $x^{\sin y} = y^{\sin x}$ तो $\frac{dy}{dx}$ ज्ञात करें।

If $x^{\sin y} = y^{\sin x}$ then find $\frac{dy}{dx}$.

3. बिंदु (3,4,1) और (5,1,6) से गुजरने वाली रेखा जहाँ yz-तल को काटती है, उस बिन्दु के नियामक ज्ञात करें।
Find the co-ordinate of the point where the line passing through the points (3,4,1) and (5,1,6) cuts the yz-plane.

4. एक यादृच्छ चर X के निम्न प्रायिकता फलन है।

$X = x_i$	0	1	2	3	4	5	6	7
$P(x_i)$	0	k	$2k$	$2k$	$3k$	k^2	$2k^2$	$7k^2 + k$

तो $P(X < 6)$ ज्ञात करें।

A random variable X has the following probability function

$X = x_i$	0	1	2	3	4	5	6	7
$P(x_i)$	0	k	$2k$	$2k$	$3k$	k^2	$2k^2$	$7k^2 + k$

Find $P(X < 6)$

5. समानान्तर चतुर्भुज का क्षेत्रफल ज्ञात करें जिसकी परस्पर भुजा $\vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k}$ और $2\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$ है।

Find the area of the parallelogram whose adjacent sides are $\vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k}$ and $2\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$.

6. यदि $\tan^{-1}x+\tan^{-1}y+\tan^{-1}z=\frac{\pi}{2}$, तो सिद्ध करें कि $xy+yz+zx=1$

If $\tan^{-1}x+\tan^{-1}y+\tan^{-1}z=\frac{\pi}{2}$ then prove that $xy+yz+zx=1$.

7. सिद्ध करें (Prove that) : $\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ x^2 & 1 & x \\ x & x^2 & 1 \end{vmatrix} = (1-x^3)^2$

8. मान ज्ञात करें (Evaluate) : $\int \frac{\sin x}{\sin(x+\alpha)}dx$

दीर्घ उत्तरीय प्रश्न
(Long Answer Type Question)

प्रश्न संख्या 9 से 12 तक दीर्घ उत्तरीय प्रकार के हैं। प्रत्येक के लिए 7 अंक निर्धारित है। **4 × 7 = 28**

Question Nos. 9 to 12 are of short answer type. Each question carries 7 marks. **4 × 7 = 28**

9. अवकल समीकरण $2xy+y^2-2x^2\cdot\frac{dy}{dx}=0$ जब $y(1)=2$ को हल करें।

Solve the differential equation $2xy+y^2-2x^2\cdot\frac{dy}{dx}=0$, $y(1)=2$

10. ज्ञात करें (Evaluate) : $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2x}{\sin^4 x+\cos^4 x}dx$

11. एक खुले बेलन के दिये गये पृष्ठ क्षेत्रफल और अधिकतम आयतन के लिए सिद्ध करें कि उसके आधार त्रिज्या और ऊँचाई बराबर है।

Prove that the height and the radius of the base of an open cylinder of given surface area and maximum volume are equal.

12. ग्राफीय विधि से LPP को हल करें

अधिकतमीकरण $z = 50x + 15y$

जबकि $5x + y \le 100$

$x + y \le 60, x,y \ge 0$

Solve the following LPP graphically

Maximize $z = 50x + 15y$

Subjected to $5x + y \le 100$

$x + y \le 60, x,y \ge 0$

ANSWERS

1. $\because \quad |A| = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 2(0+3) - 0 + 1(-2-1) = 3 \neq 0$

So, A^{-1} exists

Let B be the matrix of co-factor of elements of A

So, $B = \begin{bmatrix} 3 & 3 & -3 \\ -1 & -1 & 2 \\ -1 & -4 & 2 \end{bmatrix}$

$\therefore \quad adjA = B' = \begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 3 & -1 & -4 \\ -3 & 2 & 2 \end{bmatrix}$

$\therefore \quad A^{-1} = \dfrac{adjA}{|A|} = \dfrac{1}{3}\begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 3 & -1 & -4 \\ -3 & 2 & 2 \end{bmatrix}$

2. Given that $x^{\sin y} = y^{\sin x}$

Taking logarithen both sides, we get

$\sin y \log x = \sin x \log y$

Differentiating both sides w.r.t 'x'

$$\cos y \cdot \frac{dy}{dx} \cdot \log x + \sin y \cdot \frac{d}{dx}\log x = \cos x \cdot \log y + \sin x \cdot \frac{1}{y} \cdot \frac{dy}{dx}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dy}{dx}\left[\cos y \cdot \log x + \frac{\sin x}{y}\right] = \cos x \cdot \log y - \frac{\sin y}{x}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dy}{dx}\left[\frac{y\cos y \cdot \log x + \sin x}{y}\right] = \frac{x\cos x \cdot \log y - \sin y}{x}$$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = \frac{y\left(x\cos x \cdot \log y - \sin y\right)}{x\left(y\cos y \cdot \log x + \sin x\right)}$$

3. Equation of the line passing through (3,4,1) and (5,1,6) is

$$\frac{x-3}{5-3} = \frac{y-4}{1-4} = \frac{z-1}{6-1}$$

i.e. $\dfrac{x-3}{2} = \dfrac{y-4}{-3} = \dfrac{z-1}{5} = r(\text{let})$

$\Rightarrow \quad x = 2r + 3, y = 4 - 3r, z = 5r + 1$

So, co-ordinate of any point on the line are $(2r + 3, 4 - 3r, 5r + 1)$. If it lies on yz-plane, then $x = 0$

So, $2r + 3 = 0$

$\Rightarrow \quad r = \dfrac{-3}{2}$ [$\because$ line cuts yz-plane i.e. $x = 0$]

So, the co-ordinate of the required point are $\left(2r+3, 4-3r, 5r+1\right) = \left(0, 4+\dfrac{9}{2}, \dfrac{-15}{2}+1\right) = \left(0, \dfrac{17}{2}, \dfrac{-13}{2}\right)$

4. Since, the sum of all probabilites of a probability distribution is 1

So, $P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) + \ldots + P(X = 7) = 1$

$\Rightarrow \quad 0 + K + 2K + 2K + 3K + K^2 + 2K^2 + 7K^2 + K = 1$

$\Rightarrow \quad 10K^2 + 9K - 1 = 0$

$\Rightarrow \quad (10K - 1)(K + 1) = 0$

$\Rightarrow \quad K = -1$ and $K = \dfrac{1}{10}$

$\because \quad K > 0$

$\Rightarrow \quad K = \dfrac{1}{10}$

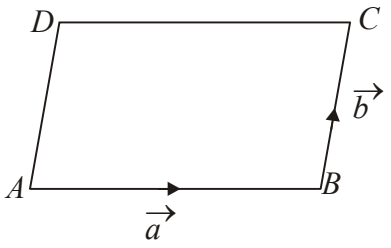
Now, $P(X < 6) = P(X = 0) + P(X = 1) + \ldots + P(X = 5)$

$= 0 + K + 2K + 2K + 3K + K^2$

$= K^2 + 8K$

$= \dfrac{1}{100} + \dfrac{8}{10} = \dfrac{81}{100}$

5. Let $ABCD$ be the given parallelogram and $\vec{a} = \overrightarrow{AB} = \hat{i} + 2\hat{j} + 2\hat{k}$ and $\overrightarrow{BC} = \vec{b} = 2\hat{i} + \hat{j} - \hat{k}$



Now, $\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \hat{i}(-2-2) - \hat{j}(-1-4) + \hat{k}(1-4) = -4\hat{i} + 5\hat{j} - 3\hat{k}$

So, area of parallelogram $ABCD = \left|\vec{a} \times \vec{b}\right| = \sqrt{(-4)^2 + 5^2 + (-3)^2} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$ sq. unit

6. Given that $\tan^{-1} x + \tan^{-1} y + \tan^{-1} z = \dfrac{\pi}{2}$

$\Rightarrow \quad \tan^{-1} x + \tan^{-1} y = \dfrac{\pi}{2} - \tan^{-1} z$

$\Rightarrow \quad \tan^{-1}\dfrac{x+y}{1-xy} = \left(\dfrac{\pi}{2} - \tan^{-1} z\right) = \cot^{-1} z$

$\Rightarrow \quad \dfrac{x+y}{1-xy} = \tan\left(\cot^{-1} z\right) = \tan\left(\tan^{-1}\dfrac{1}{z}\right)$

$\Rightarrow \quad \dfrac{x+y}{1-xy} = \dfrac{1}{z}$

$\Rightarrow \quad xz + yz = 1 - xy$

$\Rightarrow \quad xz + yz + xy = 1$

$\Rightarrow \quad xy + yz + zx = 1$

7. $\begin{vmatrix} x & a & a \\ a & x & a \\ a & a & x \end{vmatrix} = 0$

$\Rightarrow \quad \begin{vmatrix} x+2a & x+2a & x+2a \\ a & x & a \\ a & a & x \end{vmatrix} = 0$ (By $R_1 \to R_1 + R_2 + R_3$)

$\Rightarrow \quad (x+2a)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & x & a \\ a & a & x \end{vmatrix} = 0$ (Taking $(x+2a)$ common from R_1)

$\Rightarrow \quad (x+2a)\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ a-x & x-a & a \\ 0 & a-x & x \end{vmatrix} = 0$ By $C_1 \to C_1 - C_2$ and $C_2 \to C_2 - C_3$

$\Rightarrow \quad (x+2a)(a-x)(x-a)\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & a \\ 0 & 1 & x \end{vmatrix} = 0$

$\Rightarrow \quad (x+2a)(a-x)(x-a)[0-0+1] = 0$

$\Rightarrow \quad (x+2a)(a-x)^2 = 0$

$\therefore \quad x = -2a, a$

8. Let $I = \int \dfrac{\sin x}{\sin(x+\alpha)}\,dx$

Let $z = x - \alpha$

$\therefore \quad z - \alpha = x$ and $dz = dx$

$\therefore \quad I = \int \dfrac{\sin(z-\alpha)}{\sin z}\,dz = \int \dfrac{\sin z \cdot \cos\alpha - \cos z \cdot \sin\alpha}{\sin z}\,dz = \int (\cos\alpha - \cot z \cdot \sin\alpha)\,dz$

$$= \cos\alpha \int dz - \sin\alpha \int \cot z dz$$

$$= 2\cos\alpha - \sin\alpha \cdot \log|\sin z| + c$$

$$= (x+\alpha)\cos\alpha - \sin\alpha \cdot \log|\sin(x+\alpha)| + c$$

9. Given, $2xy + y^2 - 2x^2 \cdot \frac{dy}{dx} = 0$

$$\Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = \frac{2xy + y^2}{2x^2} \qquad \ldots(i)$$

This is a linear homogenous differential equation

So, put $y = vx$, then $\frac{dy}{dx} = V + x\frac{dv}{dx}$

So, (i) becomes

$$V + x\frac{dv}{dx} = \frac{2x \cdot vx + (vx)^2}{2x^2} = \frac{2V + V^2}{2} = V + \frac{1}{2}V^2$$

$$\Rightarrow \quad x\frac{dV}{dx} = \frac{1}{2}V^2$$

$$\Rightarrow \quad -2\frac{dV}{V^2} + \frac{dx}{x} = 0$$

Integrating, we get

$$\frac{2}{V} + \log|x| = C$$

$$\Rightarrow \quad \frac{2x}{y} + \log|x| = C \qquad \ldots(ii)$$

Since, $y(1) = 2$

$\therefore$ $y = 2$ where $x = 1$

$\therefore$ From (ii),

$$\frac{2\times 1}{2} + \log 1 = C$$

$$\Rightarrow \quad C = 1$$

$$\therefore \quad \frac{2x}{y} + \log|x| = 1$$

or, $2x - y + y\log|x| = 0$

This is the required solution.

10. Let $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2x}{\sin^4 x + \cos^4 x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2x}{\sin^4 x + \left(1 - \sin^2 x\right)^2} dx$

Put $\sin^2 x = t$

$\Rightarrow \quad 2\sin x \cdot \cos x\, dx = dt$

$\Rightarrow \quad \sin 2x dx = dt$

Also, $x = 0$

$\Rightarrow \quad t = 0$ and $x = \frac{\pi}{2}$

$\Rightarrow \quad t = 1$

$$\therefore \quad I = \int_0^1 \frac{dt}{t^2 + (1-t)^2} = \int_0^1 \frac{dt}{2t^2 - 2t + 1} = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{dt}{t^2 - t + \frac{1}{2}}$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t^2 - t + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} + \frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{dt}{\left(t - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2}$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)} \cdot \left[\tan^{-1} \cdot \frac{\left(t - \frac{1}{2}\right)}{\frac{1}{2}}\right]_0^1 = \left[\tan^{-1}(2t-1)\right]_0^1$$

$$= \tan^{-1} 1 - \tan^{-1}(-1) = \frac{\pi}{4} - \left(-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{2}$$

11. Let x be the radius of the cylinder and z be its height

Let S be the area of surface and V be volume of the cylinder.

So, $S = 2\pi xz + \pi x^2$ …(i)

and $V = \pi x^2 z$ …(ii)

From (i), $2\pi xz = S - \pi x^2$

$$\therefore \quad z = \frac{S - \pi x^2}{2\pi x} \quad \text{…(iii)}$$

$$\text{From (ii), } V = \pi x^2 \left(\frac{S - \pi x^2}{2\pi x}\right) = \frac{Sx}{2} - \frac{\pi x^3}{2} \quad \text{…(iv)}$$

$$\therefore \quad \frac{dv}{dx} = \frac{S}{2} - \frac{\pi}{2} \cdot 3x^2 = \frac{S}{2} - \frac{3\pi x^2}{2} \quad \text{…(v)}$$

For maximum v, $\frac{dv}{dx} = 0$

$$\therefore \quad \frac{S}{2} - \frac{3\pi}{2}x^2 = 0$$

$$\Rightarrow \quad x^2 = \frac{S}{3\pi}$$

$$\Rightarrow \quad x = \sqrt{\frac{S}{3\pi}}$$

Again, from (v), $\frac{d^2 v}{dx^2} = -\frac{3\pi}{2} \cdot 2x = -3\pi x$

When $x = \sqrt{\frac{S}{3\pi}}, \frac{d^2V}{dx^2} = -3\pi\sqrt{\frac{S}{3\pi}} = -\sqrt{3\pi} < 0$

When $x = \sqrt{\frac{S}{3\pi}}$, V is maximum

Now, $\frac{x}{2} = \frac{2\pi x^2}{S - \pi x^2}$

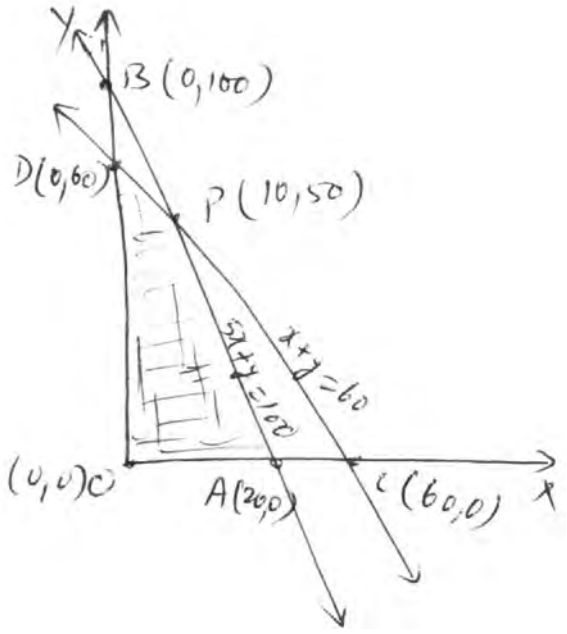
When $x = \sqrt{\frac{S}{3\pi}} \Rightarrow x^2 = \frac{S}{3\pi}$

$$\therefore \quad \frac{x}{z} = \frac{2\pi \cdot \frac{S}{3\pi}}{S - \pi \cdot \frac{S}{3\pi}} = \frac{\frac{2}{3}S}{\frac{2}{3}S} = 1$$

$\therefore \quad x = z$

Thus for maximum volume of a cylinder of given surface area $x = z$

12. We first draw the lines $5x + y = 100$ and $x + y = 60$



The feasible region is the shaded region $OAPD$.

The corner points of the feasible region are $O(0,0)$, $A((20,0)$, $P(10,50)$ and $D\ (0,60)$

To find value of $z = 50x + 15y$ at corner points

at $O(0,0)$, $z = 0$

at $A(20,0)$, $z = 50 \times 20 + 0 = 1000$

at $P(10,50)$, $z = 50 \times 10 + 15 \times 50 = 1250$

at $D(0,60)$, $z = 0 + 15 \times 60 = 900$

Thus, maximum value of $z = 1250$ at $(10,50)$ i.e. $x = 10$ and $y = 50$.

SET-7

समय : 1 घंटा 10 मिनट | पूर्णांक : 40

Time : 1 Hours 10 Min. | **Full Marks : 40**

खण्ड – I (वस्तुनिष्ठ प्रश्न)

SECTION-I (OBJECTIVE TYPE QUESTIONS)

प्रश्न संख्या 1 से 40 तक निम्न में दिए गए चार विकल्पों में से एक ही उत्तर सही है। प्रत्येक प्रश्न के सही उत्तर को उत्तर तालिका में चिह्नित करें। **40 × 1 = 40**

From Question No. 1 to 40 there is one correct answer. In each question you have to mark that correct option from given options. **40 × 1 = 40**

1. फलन $f(x)=\sqrt{(x-1)(3-x)}$ का परास है

The range of the function $f(x)=\sqrt{(x-1)(3-x)}$ is

(A) [1,3] (B) [0,1] (C) [–2,2] (D) None of these

2. $m * n = 1 + 12n + mn \ \forall\ m, n \in Q$ द्वारा परिभाषित Q पर एक द्विआधारी संक्रिया * ले। तब 2 * 3 का मान है।

Consider the binary operation * on Q defined by $m * n = 1 + 12n + mn \ \forall\ m, n \in Q$, then 2 * 3 equals

(A) 31 (B) 6 (C) 43 (D) None of these

3. $\cos^{-1}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ का मुख्य मान है

The principal value of $\cos^{-1}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ is

(A) $\frac{-2\pi}{3}$ (B) $\frac{3\pi}{4}$ (C) $\frac{5\pi}{4}$ (D) $\frac{-\pi}{4}$

4. $\begin{vmatrix} 1 & x & yz \\ 1 & y & xz \\ 1 & z & xy \end{vmatrix}$ is equal (बराबर)

(A) $(x-y)(y+z)(z+x)$ (B) $(x+y)(y-z)(z-x)$

(C) $(x-y)(y-z)(z+x)$ (D) $(x-y)(y-z)(z-x)$

5. अगर $\begin{bmatrix} 2x-y & 5 \\ 3 & y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 5 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$ तो x बराबर होगा

If $\begin{bmatrix} 2x-y & 5 \\ 3 & y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 5 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$ then $x =$

(A) 2 (B) 4 (C) 5 (D) 8

6. यदि $f: R \to R\, f(x) = 2x + 3$ द्वारा परिभाषित है तो $f^{-1}(x)$ का मान क्या होगा?

If $f: R \to R$ be defined as $f(x) = 2x + 3$, then $f^{-1}(x) =$

(A) $2x - 3$ (B) $\frac{x-3}{2}$ (C) $\frac{x+3}{2}$ (D) None of these

7. अवकल समीकरण $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2 + 2\left(\frac{dy}{dx}\right)^3 + 9y = 0$ का कोटी क्या होगा?

The order of the differential equation $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2 + 2\left(\frac{dy}{dx}\right)^3 + 9y = 0$ is

(A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) None of these

8. यदि (If) $y = \log\{\log(\log x)\}$, तो then $\frac{dy}{dx} =$

(A) $\frac{1}{\log(\log x)}$ (B) $\frac{1}{x \log\log\log x}$ (C) $\frac{1}{x\log(\log x)}$ (D) None of these

9. e^{x^3} का अवकल गुणांक $\log x$ के सापेक्ष है

The differential coefficient of e^{x^3} w.r. to $\log x$ is

(A) $3x^2e^{x^3} + 3x^2$ (B) e^{x^3} (C) $3x^3e^{x^3}$ (D) $3x^2e^{x^3}$

10. यदि (If) $y = e^{x+e^{x+e^{x+e^{x+\ldots\infty}}}}$ तो (then) $\frac{dy}{dx}$

(A) $\frac{y}{y+1}$ (B) $\frac{y}{y-1}$ (C) $\frac{y}{1-y}$ (D) None of these

11. $\frac{d}{dx}\left(\cos\left(\sin x\right)\right) = \ldots\ldots$

(A) $\sin(\sin x)\cdot\cos x$ (B) $-\sin(\sin x)\cdot\cos x$ (C) $-\sin(\cos x)\cdot\cos x$ (D) None of these

12. यदि (If) $y = 9^x$ तो (then) $\frac{d^2y}{dx^2} =$

(A) $9^{x\log 9}$ (B) $9^{x(\log 9)^2}$ (C) $(9x)^2\log 9$ (D) None of these

13. यदि (If) $y = \tan^{-1}\frac{3x - x^3}{1-3x^2}$ जहाँ (where) $|x| < 1$ तो (then) $\frac{dy}{dx} =$

(A) $\frac{1}{1+x^2}$ (B) $\frac{3}{1+x^2}$ (C) $\frac{2}{\left(1+x^2\right)^2}$ (D) None of these

14. यदि (If) $x^y = e^{x-y}$ तो (then) $\frac{dy}{dx} =$

(A) $\frac{1+x}{1+\log x}$ (B) $\frac{1-\log x}{1+\log x}$ (C) अपरिभाषित (not defined) (D) $\frac{\log x}{(1+\log x)^2}$

15. यदि (If) $y = \sin(m \sin^{-1}x)$, तो (then) $(1-x^2)y_2 - xy_1 =$ .....

(A) m^2y (B) $-m^2y$ (C) my (D) None of these

16. Rolle के साध्य में C ज्ञात करें जब $f(x) = 2x^3 - 5x^2 - 4x + 3,\ x \in \left[\frac{1}{3}, 3\right]$

Find the value of C in Roll's theorem when $f(x) = 2x^3 - 5x^2 - 4x + 3,\ x \in \left[\frac{1}{3}, 3\right]$ is

(A) $-\frac{1}{3}$ (B) $\frac{2}{3}$ (C) -2 (D) 2

17. एक वृत की त्रिज्या $r = 6$ cm पर r के सापेक्ष क्षेत्रफल में परिवर्तन की दर है।

The rate of change of area of a circle with respect to its radius r at $r = 6$ cm is

(A) 12π (B) 11π (C) 10π (D) 8π

18. निम्नलिखित में से किस अंतराल में $y = x^2e^{-x}$ वर्धमान है

The interval in which $y = x^2e^{-x}$ is increasing

(A) $(-\infty, \infty)$ (B) $(-2,0)$ (C) $(2, \infty)$ (D) $(0,2)$

19. वक्र $y = 2x^2 + 3\sin x$ के $x = 0$ पर अभिलम्ब की प्रवणता है।

The slope of the normal to the curve $y = 2x^2 + 3\sin x$ at $x = 0$ is

(A) 3 (B) $\frac{1}{3}$ (C) -3 (D) $-\frac{1}{3}$

20. किसी बिंदु पर $y = x + 1$ वक्र $y^2 = 4x$ की स्पर्श रेखा है?

The line $y = x + 1$ is a tangent to the curve $y^2 = 4x$ at the point.

(A) $(1,2)$ (B) $(2,1)$ (C) $(-1,-2)$ (D) $(-1,2)$

21. एक गोले की त्रिज्या 9 cm मापी जाती है जिसमें 0.03 cm की त्रुटि है। इसके आयतन के परिकलन में सन्निकट त्रुटि है।

If the radius of a sphere is measured as 9 cm with an error of 0.03 cm then the approximate error in calculating volume is

(A) 8.72π cm^3 (B) 9.72π cm^3 (C) 6.77πcm^3 (D) 10.52π cm^3

22. वक्र $x = a\cos^3\theta,\ y = a\sin^3\theta$ के $\theta = \frac{\pi}{4}$ पर अभिलम्ब की प्रवणता है।

The slope of the normal to the curve $x = a\cos^3\theta,\ y = a\sin^3\theta$ at $\theta = \frac{\pi}{4}$ is

(A) $\tan\theta$ (B) $\cot\theta$ (C) $-\tan\theta$ (D) $-\cot\theta$

23. x के किस मान के लिए $f(x)=\sqrt{3}\sin x+\cos x$ का मान महत्तम होगा?

For which value of x, $f(x)=\sqrt{3}\sin x+\cos x$ has maximum value ?

(A) $\frac{\pi}{6}$ (B) $\frac{\pi}{2}$ (C) $\frac{\pi}{3}$ (D) $\frac{\pi}{4}$

24. $\int \tan^2 x dx$ बराबर है (is equal to)

(A) $\tan x + x + c$ (B) $\tan x - x + c$ (C) $\tan x - 2x + c$ (D) $\tan x + 2x + c$

25. $\int \frac{\sec^2 x \tan x}{\sec^2 x + \tan^2 x} dx$ बराबर है (is equal to)

(A) $\log(\sec^2 x + \tan^2 x)$ (B) $\log(\sec^2 - \tan^2 x) + c$

(C) $\frac{1}{4}\log\left(\sec^2 x + \tan^2 x\right) + c$ (D) $\frac{1}{4}\log\left(\sec^2 x - \tan^2 x\right) + c$

26. $\int a^{3x+3} dx, a > 0$ बराबर है (is equal to)

(A) $a^3 \frac{a^{3x}}{3\log a} + c$ (B) $a^2 \frac{a^{3x}}{3\log a} + c$ (C) $\frac{a^{3x}}{\log a} + c$ (D) None of these

27. $\int \frac{\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx$ बराबर है (is equal to)

(A) $2\cos x + c$ (B) $2\sin x + c$ (C) $2\sin\sqrt{x} + c$ (D) $2\cos\sqrt{x} + c$

28. $\int \frac{x^5}{1+x^{12}} dx$ बराबर है (is equal to)

(A) $-\tan^{-1}(x^6) + c$ (B) $\tan^{-1}(x^6) + c$ (C) $-\frac{1}{6}\tan^{-1}\left(x^6\right) + c$ (D) None of these

29. $\int \frac{dx}{\sqrt{9-25x^2}}$ बराबर है (is equal to)

(A) $\frac{1}{9}\sin^{-1}\left(\frac{5x}{3}\right) + c$ (B) $\frac{1}{5}\sin^{-1}\frac{3x}{5}$ (C) $\frac{1}{5}\sin^{-1}\left(\frac{5x}{3}\right) + c$ (D) $\frac{1}{9}\sin^{-1}\left(\frac{3x}{5}\right) + c$

30. $\int_0^{\sqrt{2}} \sqrt{2-x^2} dx$ बराबर है (is equal to)

(A) $\frac{\pi}{4}$ (B) $\frac{\pi}{6}$ (C) $\frac{\pi}{8}$ (D) $\frac{\pi}{2}$

31. $\int_0^{\pi} \frac{\sin 2kx}{\sin x} dx$ बराबर है (is equal to)

(A) 1 (B) 2 (C) –1 (D) 0

32. $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} x^3 \sin^4 x dx$ बराबर है (is equal to)

(A) $\frac{\pi}{4}$ (B) $-\frac{\pi}{4}$ (C) 0 (D) 1

33. $\int_{-1}^{1} e^{|\theta|} d\theta$ बराबर है (is equal to)

(A) $(e-1)$ (B) $2(e-1)$ (C) $3(e-1)$ (D) $-2(e-1)$

34. $\lim_{n\to\infty} \frac{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\ldots+\sqrt{n}}{n^{\frac{3}{2}}}$ बराबर है (is equal to)

(A) $\frac{1}{2}$ (B) $\frac{1}{3}$ (C) $\frac{2}{3}$ (D) $\frac{3}{2}$

35. सदिश $2\vec{i}-7\vec{j}-3\vec{k}$ का मापांक है।

Modulus of the vector $2\vec{i}-7\vec{j}-3\vec{k}$ is

(A) $\sqrt{12}$ (B) $\sqrt{50}$ (C) $\sqrt{62}$ (D) $2\sqrt{5}$

36. यदि $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ इकाई लम्बवत सदिश हो, तो $\left|\vec{a}-\vec{b}\right|^2+\left|\vec{b}-\vec{c}\right|^2$ बराबर है।

If $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ are unit vectors and mutually perpendicular then $\left|\vec{a}-\vec{b}\right|^2+\left|\vec{b}-\vec{c}\right|^2$ is equal to

(A) 4 (B) 9 (C) 8 (D) 6

37. यदि $\left|\vec{a}\right|=\sqrt{26},\left|\vec{b}\right|=7$ और $\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|=35$ तो $\vec{a}\cdot\vec{b}=$

If $\left|\vec{a}\right|=\sqrt{26},\left|\vec{b}\right|=7$ and $\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|=35$ then $\vec{a}\cdot\vec{b}=$

(A) 5 (B) 7 (C) 9 (D) 11

38. सरल रेखाएँ $x-y+z-5=0$ और $x-3y-6=0$ की दिक् अनुपात है।

The direction ratio of the line $x-y+z-5=0$ and $x-3y-6=0$ are

(A) 3,1,–2 (B) 2, –4, 1 (C) $\frac{3}{\sqrt{14}},\frac{1}{\sqrt{14}},\frac{-2}{\sqrt{14}}$ (D) $\frac{2}{\sqrt{41}},\frac{-4}{\sqrt{41}},\frac{1}{\sqrt{41}}$

39. सामान्य रैखिक प्रोग्रामन में उद्देश्य फलन है

An objective function in general LPP is

(A) रैखिक फलन (Linear function) (B) अरैखिक फलन (Non-collinear function)

(C) अचर फलन (Constant function) (D) इनमें कोई नहीं (None of these)

40. तीन छात्रों द्वारा एक प्रश्न के हल करने की प्रायिकताएँ $\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4}$ हैं, तो प्रश्न के हल किये जाने की प्रायिकता है।

The probability of solving a problem by three students are $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}$; then the probability that the problem will be solved.

(A) $-\frac{1}{4}$ (B) $\frac{5}{4}$ (C) $\frac{3}{4}$ (D) $\frac{7}{4}$

ANSWERS

1.	(B)	**2.**	(C)	**3.**	(D)	**4.**	(D)	**5.**	(A)	**6.**	(B)	**7.**	(A)	**8.**	(B)	**9.**	(C)	**10.**	(C)
11.	(B)	**12.**	(B)	**13.**	(B)	**14.**	(D)	**15.**	(C)	**16.**	(D)	**17.**	(A)	**18.**	(D)	**19.**	(D)	**20.**	(A)
21.	(B)	**22.**	(B)	**23.**	(C)	**24.**	(B)	**25.**	(C)	**26.**	(A)	**27.**	(B)	**28.**	(D)	**29.**	(C)	**30.**	(D)
31.	(D)	**32.**	(C)	**33.**	(B)	**34.**	(C)	**35.**	(C)	**36.**	(B)	**37.**	(B)	**38.**	(A)	**39.**	(A)	**40.**	(C)

खण्ड – II (गैर – वस्तुनिष्ठ प्रश्न)

SECTION-II (NON-OBJECTIVE TYPE QUESTIONS)

समय : 2 घंटा 05 मिनट **पूर्णांक : 60**
Time : 2 Hours 05 Min. **Full Marks : 60**

लघु उत्तरीय प्रश्न
(Short Answer Type Question)

प्रश्न संख्या 1 से 8 तक लघु उत्तरीय प्रकार के हैं। प्रत्येक के लिए 4 अंक निर्धारित है। **8 × 4 = 32**
Question Nos. 1 to 8 are of short answer type. Each question carries 4 marks. **8 × 4 = 32**

1. सिद्ध करें कि (Prove that) $\sin^{-1}\frac{12}{13}+\cos^{-1}\frac{4}{5}+\tan^{-1}\frac{63}{16}=\pi$

2. दिखाएँ (Show that) : $\begin{bmatrix}5 & -1\\ 6 & 7\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 1\\ 3 & 4\end{bmatrix}\neq\begin{bmatrix}2 & 1\\ 3 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}5 & -1\\ 6 & 7\end{bmatrix}$

3. मान निकालें (Evaluate) : $\begin{vmatrix}1 & bc & bc(a+c)\\ 1 & ca & ca(c+a)\\ 1 & ab & ab(a+b)\end{vmatrix}$

4. समीकरण को हल करें (Solve the equation) : $\tan^{-1}(x+1)+\tan^{-1}(x-1)=\tan^{-1}\frac{8}{31}$

5. यदि $y=\sin^{-1}\left[x\sqrt{1-x}-\sqrt{x}\sqrt{1-x^2}\right]$ तो $\frac{dy}{dx}$ का मान निकालें।

If $y=\sin^{-1}\left[x\sqrt{1-x}-\sqrt{x}\sqrt{1-x^2}\right]$ find $\frac{dy}{dx}$.

6. समाकलन करें (Integrate) : $\int\frac{dx}{x^2\sqrt{1+x^2}}$

7. अगर $\vec{a}=\vec{i}-2\vec{j}+3\vec{k}$ तथा $\vec{b}=2\vec{i}+3\vec{j}-5\vec{k}$ तब $\vec{a}\times\vec{b}$ ज्ञात करें तथा सिद्ध करें $\vec{a}\perp\vec{a}\times\vec{b}$

If $\vec{a}=\vec{i}-2\vec{j}+3\vec{k}$ and $\vec{b}=2\vec{i}+3\vec{j}-5\vec{k}$ find $\vec{a}\times\vec{b}$ and verify that $\vec{a}$ is perpendicular to $\vec{a}\perp\vec{a}\times\vec{b}$

8. एक पाशा का तीन बार फेंका गया तो बताये कि कम से कम एक बार विषय संख्या आने की प्रायिकता क्या है?

दीर्घ उत्तरीय प्रश्न
(Long Answer Type Question)

प्रश्न संख्या 9 से 12 तक दीर्घ उत्तरीय प्रकार के हैं। प्रत्येक के लिए 7 अंक निर्धारित है। **4 × 7 = 28**

Question Nos. 9 to 12 are of short answer type. Each question carries 7 marks. **4 × 7 = 28**

9. हल करें (Solve) : $\left(1+e^{\frac{x}{y}}\right)dx+e^{\frac{x}{y}}\left(1-\frac{x}{y}\right)dy=0$

10. मान निकालें (Evaluate) : $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^2 x}{1+\sin x\cos x}dx$

11. A line makes angles α, β, γ and δ with four diagonals of a cube prove that $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma+\cos^2\delta=\frac{4}{3}$

12. न्यूनतमीकरण तथा अधिकतम $z = 5x + 10y$

जबकि $x + 2y \le 120$

$x + y \ge 60, x - 2y \ge 0$

$x, y \ge 0$

Minimise and Maximise $z = 50x + 15y$

Subjected to $x + 2y \le 120$

$x + y \ge 60, x - 2y \ge 0$

$x, y \ge 0$

ANSWERS

1. Let $\sin^{-1}\frac{12}{13}=\alpha, \cos^{-1}\frac{4}{5}=\beta$ and $\tan^{-1}\frac{63}{16}=\gamma$

Then $\sin\alpha=\frac{12}{13}, \cos\beta=\frac{4}{5}$ and $\tan\gamma=\frac{63}{16}$

Therefore $\cos\alpha=\frac{5}{13}, \sin\beta=\frac{3}{5}, \tan\alpha=\frac{12}{5}$ and $\tan\beta=\frac{3}{4}$

Now, $\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}=\frac{\frac{12}{5}+\frac{3}{4}}{1-\frac{12}{5}\cdot\frac{3}{4}}=\frac{\frac{12}{5}+\frac{3}{4}}{20}\times\frac{20}{-16}=\frac{-63}{16}$

$\alpha+\beta=a-\tan^{-1}\left(\frac{63}{16}\right)$

$\boxed{\text{since } \tan\alpha\tan\beta=1}$

$$\Rightarrow \quad \alpha+\beta+\tan^{-1}\left(\frac{63}{16}\right)=\pi$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\sin^{-1}\frac{12}{13}+\cos^{-1}\frac{4}{5}+\tan^{-1}\frac{63}{16}=\pi}$$

2. $\begin{bmatrix}5 & -1\\ 6 & 7\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 1\\ 3 & 4\end{bmatrix}$

$$=\begin{bmatrix}5\cdot2+(-1)\cdot3 & 5\cdot1+(-1)\cdot4\\ 6.2+7.3 & 6.1+7.4\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}10-3 & 5-4\\ 12+21 & 6+28\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}7 & 1\\ 33 & 34\end{bmatrix} \qquad \ldots(i)$$

and $\begin{bmatrix}2 & 1\\ 3 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}5 & -1\\ 6 & 7\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2.5+1.6 & 2(-1)+1.7\\ 3.5+4.6 & 3\cdot(-1)+4.7\end{bmatrix}$

$$=\begin{bmatrix}10+6 & -2+7\\ 15+24 & -3+28\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}16 & 5\\ 39 & 25\end{bmatrix} \qquad \ldots(ii)$$

From (i) and (ii) we get

$$\begin{bmatrix}5 & -1\\ 6 & 7\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 1\\ 3 & 4\end{bmatrix}\neq\begin{bmatrix}2 & 1\\ 3 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}5 & -1\\ 6 & 7\end{bmatrix}$$

3. By applying $c_2 \to c_2 + c_3$ we get

$$\Delta=\begin{vmatrix}1 & bc+ca+ab & a(b+c)\\ 1 & bc+ca+ab & b(c+a)\\ 1 & bc+ca+ab & c(a+b)\end{vmatrix}=bc+ca+ab\begin{vmatrix}1 & 1 & a(b+c)\\ 1 & 1 & b(c+a)\\ 1 & 1 & c(a+b)\end{vmatrix}=(bc+ca+ab)\times 0=0$$

$\boxed{\text{Since } c_1 \text{ and } c_2 \text{ are indentical}}$

4. From the given equation, we have

$$\tan^{-1}\frac{(x+1)+(x-1)}{1-(x+1)(x-1)}=\tan^{-1}\frac{8}{31}$$

provided $(x+1)(x-1)<1$

i.e., $x^2-1<1$

$\therefore \quad x^2<2 \qquad \ldots(i)$

$$\Rightarrow \quad \tan^{-1}\frac{2x}{1-(x^2-1)}=\tan^{-1}\frac{8}{31}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{2x}{2-x^2}=\frac{8}{31}$$

$\Rightarrow \quad 4x^2 + 31x - 8 = 0$

$\Rightarrow \quad (4x - 1)(x + 8) = 0$

$\therefore \quad x = \frac{1}{4}$ or -8

But $x = -8$ does not satisfy (i)

Hence $x = \frac{1}{4}$ is the only solution.

5. Putting $x = \sin\theta$ and $\sqrt{x} = \sin\phi$, We get

$$y = \sin^{-1}\left[\sin\theta\sqrt{1-\sin^2\phi} - \sin\phi\sqrt{1-\sin^2\theta}\right]$$

$= \sin^{-1}[\sin\theta\cos\phi - \sin\phi\cos\theta]$

$= \sin^{-1}[\sin(\theta - \phi)] = \theta - \phi$

$= \sin^{-1} x - \sin^{-1}\left(\sqrt{x}\right)$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(\sin^{-1} x) - \frac{d}{dx}\left(\sin^{-1}\sqrt{x}\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{1}{\sqrt{1-x}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$= \boxed{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{1}{2\sqrt{x}\sqrt{1-x}}}$$

6. Let $x = \tan\theta$

Then $dx = \sec^2\theta\, d\theta$

$$\therefore \quad I = \int \frac{\sec^2\theta d\theta}{\tan^2\theta\sqrt{1+\tan^2\theta}} = \int \frac{\sec\theta d\theta}{1+\tan^2\theta}$$

$$= \int \frac{1}{\cos\theta} \cdot \frac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta} d\theta$$

$$= \int \frac{\cos\theta}{\sin\theta} \cdot \frac{1}{\sin\theta} d\theta$$

$$= \int \cot\theta \cdot \operatorname{cosec}\theta d\theta = -\operatorname{cosec}\theta$$

But $\tan\theta = x$

$$\therefore \quad \sin\theta = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

i.e. $\operatorname{cosec} = \frac{\sqrt{1+x^2}}{x}$

$\therefore \quad I = -\dfrac{\sqrt{1+x^2}}{x} + C$

7. We have $\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -2 & 3 \\ 2 & 3 & -5 \end{vmatrix} = \vec{i}(10-9) - \vec{j}(-5-6) + \vec{k}(3+4) = \vec{i} + 11\vec{j} + 7\vec{k}$

Now, $\vec{a} \cdot \left(\vec{a} \times \vec{b}\right) = \left(\vec{i} - 2\vec{j} + 3\vec{k}\right) \cdot \left(\vec{i} + 11\vec{j} + 7\vec{k}\right) = 1 - 2\,(11) + 3\,(7) = 1 - 22 + 21 = 0$

Hence $\boxed{\text{Hence } \vec{a} \perp \left(\vec{a} \times \vec{b}\right)}$

8. The odd numbers on the face of a die are [1,3,5]

Let A = The event of getting an odd number on the first toss

B = The event of getting an odd number on the second toss.

C = The event of getting an odd number on the third toss.

$\therefore \quad P(A) = \dfrac{3}{6} = \dfrac{1}{2}, P(B) = \dfrac{3}{6} = \dfrac{1}{2}$ and $P(C) = \dfrac{1}{2}$

P(getting A, B or C at least once) = $1 - P(A')\,P(B')\,P(C') = 1 - \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{1}{2} = 1 - \dfrac{1}{8} = \dfrac{7}{8}$

$\boxed{\text{Hence the required probability} = \dfrac{7}{8}}$

9. The given differential equation may be written as

$$\left(1 + e^{\frac{x}{y}}\right) dx = -e^{\frac{x}{y}} \left(1 - \frac{x}{y}\right) dy$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dx}{dy} = \frac{-e^{\frac{x}{y}} \left(1 - \frac{x}{y}\right)}{1 + e^{\frac{x}{y}}} \qquad \ldots(i)$$

Put $\dfrac{x}{y} = v$ so that $x = vy$

$\therefore \quad \dfrac{dx}{dy} = v + y\dfrac{dv}{dy}$

Hence from (i),

$$v + y\frac{dv}{dy} = \frac{-e^v(1-v)}{1+e^v}$$

$$\Rightarrow \quad y\frac{dv}{dy} = \frac{-e^v + ve^u}{1+e^v} - v = \frac{-e^v + ve^v - ve^v - v}{1+e^u} = \frac{-e^v - v}{1+e^v}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dy}{y} = -\frac{1+e^v}{e^v + v}dv$$

Integrating, we get $\int \frac{dy}{y} = -\int \frac{1+e^v}{v+e^v}dv$

$$\Rightarrow \quad \log y = -\int \frac{1+e^v}{e^v+v}dv \qquad \ldots(ii)$$

In R.H.S. of (ii), put $v + e^v = t$

$\therefore \quad (1 + e^v)dv = dt$

Hence from (ii),

$$\log y = -\int \frac{dt}{t} = k - \log t$$

$\Rightarrow \quad \log y + \log t + k$

$\Rightarrow \quad \log (yt) = \log C$

$\Rightarrow \quad yt = c$

$\Rightarrow \quad y(v + e^v) = c$

$$\Rightarrow \quad y\left(\frac{x}{y} + e^{\frac{x}{y}}\right) = C$$

Putting $v = \frac{x}{f}$

$$\Rightarrow \quad x + ye^{\frac{x}{y}} = c$$

which is the required solution.

10. Let $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 x}{1+\sin x \cos x}dx$

then $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}{1+\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}dx$

$$\boxed{\text{since } \int_0^a f(x)dx = \int_0^a f(a-x)dx}$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 x dx}{1+\cos x \sin x}$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 x dx}{1+\sin x \cos x} \qquad \ldots(ii)$$

Adding (i) and (ii) we get

$$2I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 x}{1+\sin x \cos x}\,dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 x}{1+\sin x \cos x}\,dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{1+\sin x \cos x}\,dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+\sin x \cos x}\,dx \qquad \ldots(iii)$$

Now, we evaluate

$$I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1+\sin x \cos x}$$

Multiplying the numerator and denominator by $\sec^2 x$, we get

$$I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sec^2 x dx}{\sec^2 x + \tan x} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sec^2 x dx}{1+\tan^2 x + \tan x} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sec^2 x dx}{\tan^2 x + \tan x + 1}$$

Now, put $\tan x = t$ so that $\sec^2 x\,dx = dt$

Also $x = 0$

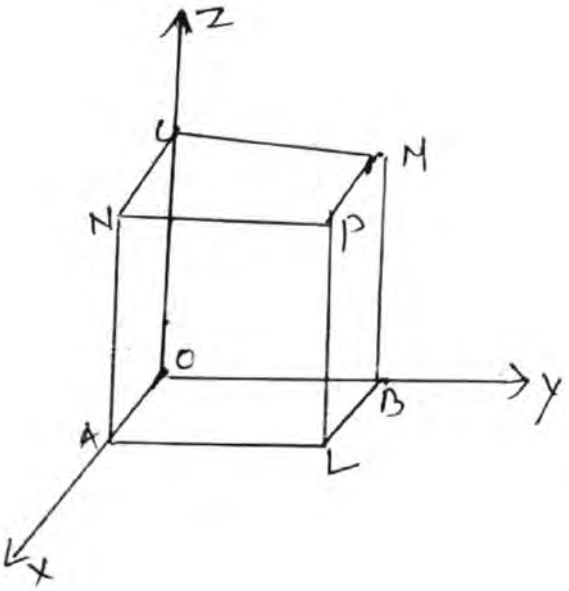
$\Rightarrow \quad t = 0$

and $\left(x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow t = \infty\right)$

Hence $I_1 = \int_0^{\infty} \frac{dt}{t^2+t+1} = \int_0^{\infty} \frac{dt}{\left(t+\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \left[\frac{2}{\sqrt{3}} \tan^{-1} \frac{t+\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\right]_0^{\infty} = \frac{2}{\sqrt{3}}\left[\tan^{-1}(\infty) - \tan^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right]$

$$\boxed{= \frac{2}{\sqrt{3}}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}}$$

11. हम जानते हैं कि एक घन (cube) समकोणिक षट्फलकीय (sixface) तथा समान लम्बाई, चौड़ाई, ऊँचाई वाला होता है। माना कि *OALBPNCN* एक घन है जिसकी प्रत्येक भुजा a लम्बाई की है।



अब निर्देशांक रूप में बिंदु $O(0,0,0)$, $A(a, 0,0)$, $B(0, a, 0)$, $C(0,0,a)$, $L(a, a, 0)$, $N(0,a,a)$, $N(a, 0, a)$, $P(a, a, a)$ है।
स्पष्टत: इस घन के चार विकर्ण OP, AN, BN तथा CL है विकर्ण OP की दिक्-कोसाइन

$$\frac{a-0}{\sqrt{a^2+a^2+a^2}}, \frac{a-0}{\sqrt{a^2+a^2+a^2}}, \frac{a-0}{\sqrt{a^2+a^2+a^2}}$$

यानि $\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}$ हैं।

विकर्ण AN की दिक् कोसाइन

$$\frac{a-0}{\sqrt{a^2+a^2+a^2}}, \frac{a-0}{\sqrt{a^2+a^2+a^2}}, \frac{0-a}{\sqrt{a^2+a^2+a^2}} \text{ यानि } \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{-1}{\sqrt{3}} \text{ हैं।}$$

माना कि उक्त रेखा की दिक् कोसाइन l,m,n है। जो विकर्ण OP, AM, BN, CL के साथ कोण क्रमश: $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ बनाते है तो

$$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}l + \frac{1}{\sqrt{3}}m + \frac{1}{\sqrt{3}}n = \frac{l+m+n}{\sqrt{3}}$$

$$\cos\beta = -\frac{1}{\sqrt{3}}l + \frac{1}{\sqrt{3}}m + \frac{1}{\sqrt{3}}n = \frac{-l+m+n}{\sqrt{3}}$$

$$\cos\gamma = \frac{1}{\sqrt{3}}l - \frac{1}{\sqrt{3}}m + \frac{1}{\sqrt{3}}n = \frac{l-m+n}{\sqrt{3}}$$

$$\cos\delta = \frac{1}{\sqrt{3}}l + \frac{1}{\sqrt{3}}m - \frac{1}{\sqrt{3}}n = \frac{l+m-n}{\sqrt{3}}$$

$\Rightarrow \quad \cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma + \cos^2\delta$

$$= \frac{1}{3}\left[(l+m+n)^2 + (-l+m+n)^2 + (l-m+n)^2 + (l+m-n)^2\right]$$

$$= \frac{1}{3}\left[4(l^2+m^2+n^2) + 2lm + 2mn + 2nl - 2lm + 2mm - 2nl - 2lm - 2mm + 2nl + 2lm - 2mm - 2nl\right]$$

$$= \frac{1}{3}\left[4(1) + 0\right] = \frac{4}{3}$$

i.e., $\boxed{\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma + \cos^2\delta = \frac{4}{3}}$

12. First of all let us graph the feasible region of the given system of inequations.

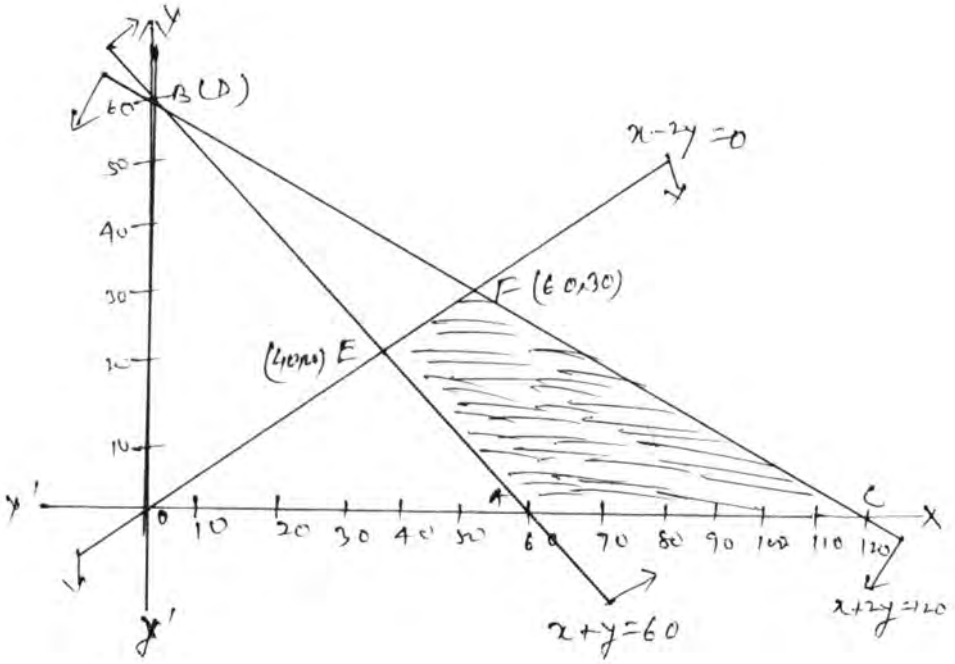
The feasible region the shaded region determined by the given system of constraints.

We observe that the feasible region $ACFE$ is bounded. So we use corner point method to determine the maxi. and min value of z.

The co-ordinates of the corner points A,C,F,E are (60,0), (120,0), (60,30) and (40,20) respectively.

Now we evaluate $z = 5x + 10y$ at each corner point.

100



Corner point	$z = 5x + 10y$
(60,0)	200 ← min
(120,0)	600 ← max.
(60,30)	600
(40,20)	400

Hence the min. value of z is 300 at the point (60,0) and the max. value of z is 600 at each of the points (120,0) abd (60,30) and consequently the max. value of z is 600 at each of the points of line segment CF joining (120,0) and (60,30).

SET-8

समय : 1 घंटा 10 मिनट | पूर्णांक : 40

Time : 1 Hours 10 Min. | **Full Marks : 40**

खण्ड – I (वस्तुनिष्ठ प्रश्न)

SECTION-I (OBJECTIVE TYPE QUESTIONS)

प्रश्न संख्या 1 से 40 तक निम्न में दिए गए चार विकल्पों में से एक ही उत्तर सही है। प्रत्येक प्रश्न के सही उत्तर को उत्तर तालिका में चिह्नित करें। **40 × 1 = 40**

From Question No. 1 to 40 there is one correct answer. In each question you have to mark that correct option from given options. **40 × 1 = 40**

1. अगर समुच्चय A में R सबसे बड़ा तुल्यता संबंध हो एवं S भी कोई संबंध A में हो, तो

If R is the largest equivalence relation on A and S is any relation on A, then

(A) $R \subset S$ (B) $S \subset R$ (C) $R = S$ (D) None of these

2. यदि फलन $f: R \to R, f(x) = 3x - 5$ द्वारा परिभाषित है तो $f^{-1}(x)$ है

If $f: R \to R$ is given by $f(x) = 3x - 5$, then $f^{-1}(x)$ is

(A) $\frac{1}{3x-5}$ (B) $\frac{x+5}{3}$

(C) (अस्तित्व नहीं क्योंकि f एकैकी नहीं है)does not exist because f is not one

(D) None of these

3. यदि द्विचर संक्रियाएँ * इस तरह परिभाषित है कि $a * b = a^2 + b^2$ तो $(1 * 2) * 5$ का मान

In an operation '*' defined by $a * b = a^2 + b^2$ then $(1 * 2) * 5$ is

(A) 50 (B) 125 (C) 625 (D) 3125

4. $\sin^{-1}\left(\sin\frac{2\pi}{3}\right)$ का मुख्य मान है

The principal value of $\sin^{-1}\left(\sin\frac{2\pi}{3}\right)$ is

(A) $\frac{-2\pi}{3}$ (B) $\frac{2\pi}{3}$ (C) $\frac{4\pi}{3}$ (D) $\frac{\pi}{3}$

5. यदि (If) $\sin\left(\sin^{-1}\frac{1}{5} + \cos^{-1} x\right)$ तो (then) $x =$

(A) 1 (B) 0 (C) $\frac{4}{5}$ (D) $\frac{1}{5}$

6. यदि $\tan^{-1} x + \tan^{-1} y + \tan^{-1} z = \frac{\pi}{2}$ तो $xy + yz + zx$ का मान है।

If $\tan^{-1} x + \tan^{-1} y + \tan^{-1} z = \frac{\pi}{2}$ then the value of $xy + yz + zx$ is

(A) -1 (B) 1 (C) 0 (D) None of these

7. $\cos\left[\frac{\pi}{2} + \sin^{-1}\left(\frac{1}{3}\right)\right]$ का मान होगा

The value of $\cos\left[\frac{\pi}{2} + \sin^{-1}\left(\frac{1}{3}\right)\right]$ is

(A) $\frac{1}{3}$ (B) $-\frac{1}{3}$ (C) 1 (D) 0

8. यदि $2\begin{bmatrix} x & 5 \\ 3 & y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 10 \\ 6 & 6 \end{bmatrix}$ तो x तथा y का मान होगा

If $2\begin{bmatrix} x & 5 \\ 3 & y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 10 \\ 6 & 6 \end{bmatrix}$ then the values of x and y are

(A) $x = 2, y = 3$ (B) $x = 3, y = 2$ (C) $x = 2, y = 2$ (D) $x = 3, y = 3$

9. यदि (If) $A = \begin{vmatrix} i & 0 \\ 0 & i \end{vmatrix}$ तो (then) $A^2 =$

(A) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ (B) $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ (C) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ (D) $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

10. $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ एक वर्ग आव्यूह है, अगर

$A = [a_{ij}]_{m \times n}$ is a square matrix if

(A) $m < n$ (B) $m > n$ (C) $m = n$ (D) None of these

11. माना कि A एक व्युत्क्रमणीय आव्यूह है जिसका क्रम 2×2 है, तो $|adj\ A| =$

Let A be a non singular matrix of order 2×2 then $|adj\ A| =$

(A) $2|A|$ (B) $|A|$ (C) $|A|^2$ (D) $|A|^3$

12. यदि a,b,c समानान्तर श्रेणी में हो तो $\begin{vmatrix} x+2 & x+3 & x+2a \\ x+3 & x+4 & x+2b \\ x+4 & x+5 & x+2c \end{vmatrix}$

If a,b,c are in A.P. then $\begin{vmatrix} x+2 & x+3 & x+2a \\ x+3 & x+4 & x+2b \\ x+4 & x+5 & x+2c \end{vmatrix}$

(A) 0 (B) 1 (C) x (D) $2x$

13. यदि (If) $A = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}$ then (तो) $A^2 - 5A + 7I$ is (है)

(A) विकर्ण आव्यूह (Diagonal matrix) (B) तत्समक आव्यूह (Identify matrix)

(C) शून्य आव्यूह (zero matix) (D) None of these

14. यदि $x = a\sin 2t\,(1 + \cos 2t)$ तथा $y = b\cos 2t\,(1 - \cos 2t)$ तो $t = \frac{\pi}{4}$ पर $\frac{dy}{dx}$ का मान होगा।

If $x = a\sin 2t\,(1 + \cos 2t)$ and $y = b\cos 2t\,(1 - \cos 2t)$ then the value of $\frac{dy}{dx}$ at $t = \frac{\pi}{4}$ is

(A) $\frac{a}{b}$ (B) $\frac{b}{a}$ (C) ab (D) $a + b$

15. यदि $x = at^2,\ y = 2at$ तो $\frac{dy}{dx} =$

If $x = at^2, y = 2at$ then $\frac{dy}{dx} =$

(A) t (B) $\frac{1}{t}$ (C) at (D) $\frac{a}{t}$

16. अगर (If) $y = \sin(x^3)$ तो (then) $\frac{dy}{dx} =$

(A) $x^3\cos(x^3)$ (B) $3x^2\sin(x^3)$ (C) $3x^2\cos(x^3)$ (D) $\cos(x^3)$

17. लौग्रांज का माध्य मान साध्य में x ज्ञात करें जब $f(x) = x^3 - 2x^2 - x + 3,\ x \in [0,1]$

Find the value of x in Lagarange's mean value theorem for the function $f(x) = x^3 - 2x^2 - x + 3,\ x \in [0,1]$ is

(A) 2 (B) $\frac{1}{2}$ (C) 3 (D) $\frac{1}{3}$

18. एक गुब्बारा जो सदैव गोलाकार रहता है का परिवर्तनशील व्यास $\frac{3}{2}(x+1)$ है x के सापेक्ष आयतन के परिवर्त्तन की दर है।

A ballon which always remains spherical has a variable diameter $\frac{3}{2}(x+1)$. Find the rate of change of its volume with respect to x.

(A) $\frac{27\pi}{8}(2x+1)^3$ (B) $\frac{27\pi}{16}(2x+1)$ (C) $\frac{27\pi}{8}(2x+1)^2$ (D) None of these

19. निम्नलिखित में से किस अंतराल में $f(x) = (x + 1)^3\,(x - 3)^3$ वर्धमान है?

The interval in which $f(x) = (x + 1)^3\,(x - 3)^3$ is increasing

(A) $[1, \infty]$ (B) $(1, \infty)$ (C) $[-1, \infty]$ (D) $]-\infty, 1[$

20. $\left(x^{\frac{1}{2}}, x > 0\right)$ का उच्चतम मान है

The maximum value of $x^{\frac{1}{2}}, x > 0$ is

(A) $\frac{1}{e^e}$ (B) $\left(\frac{1}{e}\right)^c$ (C) 1 (D) None of these

21. $\int \sec x^\circ \tan x^\circ \, dx$ बराबर है (is equal to)

(A) $\sec x^\circ + c$ (B) $\frac{\pi}{180}\sec x^\circ + c$ (C) $\frac{180^\circ}{\pi}\sec x^\circ + c$ (D) None of these

22. $\int \frac{x^4}{x^2+1} dx$ बराबर है (is equal to)

(A) $\frac{x^2}{2} - x + \tan^{-1} x + c$ (B) $\frac{x^3}{3} - x + \tan^{-1} x + c$

(C) $\frac{x^3}{3} + x - \tan^{-1} x + c$ (D) None of these

23. $\int \frac{1}{e^x + e^{-x}} dx$ बराबर है (is equal to)

(A) $\cot^{-1}(e^x) + c$ (B) $\cot^{-1}(e^{-x}) + c$ (C) $\tan^{-1}(e^x) + c$ (D) $\tan^{-1}(e^{-x}) + c$

24. $\int \frac{2x \cdot \tan^{-1} x^2}{1+x^4} dx$ बराबर है (is equal to)

(A) $\frac{\tan^{-1} x^2}{2} + c$ (B) $\frac{(\tan x)^2}{2} + c$ (C) $\frac{(\tan^{-1} x^2)^3}{3} + c$ (D) None of these

25. $\int \left| \frac{1}{\log x} - \frac{1}{(\log x)^2} \right| dx$ बराबर है (is equal to)

(A) $\frac{\log x}{x} + c$ (B) $\frac{x}{\log x} + c$ (C) $-\frac{x}{\log x} + c$ (D) $\frac{-\log x}{x} + c$

26. $\int \frac{\sec^2 x}{\tan^2 x + 4} dx$ बराबर है (is equal to)

(A) $\log \left| \tan x + \sqrt{\tan^2 x + 4} \right| + c$ (B) $\log \left| \tan x - \sqrt{\tan^2 x + 4} \right| + c$

(C) $\left| \tan x + \sqrt{\sec^2 x + 4} \right| + c$ (D) None of these

27. $\int_0^3 x(3-x)^{\frac{3}{2}} dx$ बराबर है (is equal to)

(A) $\frac{108\sqrt{3}}{35}$ (B) $-\frac{108\sqrt{3}}{35}$ (C) $\frac{-54\sqrt{3}}{35}$ (D) None of these

28. $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{1+\sqrt{\tan x}}$ बराबर है (is equal to)

(A) $\frac{\pi}{3}$ (B) $\frac{\pi}{6}$ (C) $\frac{\pi}{9}$ (D) $\frac{\pi}{12}$

29. $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$ बराबर है (is equal to)

(A) $\frac{\pi}{2}$ (B) $\frac{\pi}{3}$ (C) $\frac{\pi}{4}$ (D) $\frac{\pi}{6}$

30. वक्र $y^2 = x$, x-अक्ष एवं रेखाएँ $x = 1, x = 4$ से घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल है।

Area of the region bounded by the curve $y^2 = x$, x-axis and the line $x = 1, x = 4$ is

(A) $\frac{3}{2}$sq. unit (B) $\frac{4}{5}$sq. unit (C) $\frac{14}{3}$sq. unit (D) $\frac{9}{4}$sq. unit

31. वृत्त $x^2 + y^2 = a^2$ का क्षेत्रफल समाकलन द्वारा है

Area of the circle $x^2 + y^2 = a^2$ by integration is

(A) $4\pi a^2$ (B) $3\pi a^2$ (C) πa^2 (D) $8\pi a^2$

32. अवकल समीकरण $2x^2 \frac{d^2y}{dx^2} + y = 0$ की कोटि है

The order of the differential equation $2x^2 \frac{d^2y}{dx^2} + y = 0$ is

(A) 2 (B) 1 (C) zero (D) None of these

33. अवकल समीकरण $\frac{dy^2}{dx^2} + 9y = 0$ का हल है

The solution of the differential equation $\frac{dy^2}{dx^2} + 9y = 0$ is

(A) $y = 4\sin 3x$ (B) $y = 4\cos 3x$ (C) $y = 2\sin 3x$ (D) $y = 2\cos 2x$

34. अवकल समीकरण $\frac{dy}{dx} = y \sin 2x$ [जहाँ $y(0) = 1$]

The solution of the diff equation $\frac{dy}{dx} = y \sin 2x$ where $y(0) = 1$ is

(A) $y = e^{\sin^3 x}$ (B) $y = e^{\cos^3 x}$ (C) $y = e^{\sin^2 x}$ (D) $y = e^{\cos^2 x}$

35. सदिश $\vec{a} = 2\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$ का सदिश $\vec{b} = \vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}$ पर प्रक्षेप है

Projection of vector $\vec{a} = 2\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$ on the vector $\vec{b} = i - 2\vec{J} + \vec{K}$ is

(A) $\frac{5}{\sqrt{6}}$ (B) $\frac{7}{\sqrt{6}}$ (C) $\frac{9}{\sqrt{6}}$ (D) $\frac{11}{\sqrt{6}}$

36. यदि $\vec{a}$ एक इकाई सदिश हो ताकि $\left(\vec{x}-\vec{a}\right)\cdot\left(\vec{x}+\vec{a}\right)=12$, तो $\vec{x}$ का मापांक है।

If $\vec{a}$ is a unit vector such that $\left(\vec{x}-\vec{a}\right)\cdot\left(\vec{x}+\vec{a}\right)=12$ then the magnitude of $\vec{x}$ is

(A) $\sqrt{12}$ (B) 12 (C) 13 (D) $\sqrt{13}$

37. xy-तल पर स्थित प्रत्येक बिन्दु $P(x,y,z)$ के लिए

For every point $P(x,y,z)$ on xy- plane

(A) $x=0$ (B) $y=0$ (C) $z=0$ (D) None of these

38. किसी सरल रेखा के दिक् अनुपात 1,3,5 हैं, तो रेखा की दिक् कोज्याएँ है।

The direction ratio of a line are 1,3,5 then its direction cosine are

(A) $\frac{1}{\sqrt{35}},\frac{3}{\sqrt{35}},\frac{5}{\sqrt{35}}$ (B) $\frac{1}{9},\frac{1}{3},\frac{5}{9}$ (C) $\frac{5}{\sqrt{35}},\frac{3}{\sqrt{35}},\frac{1}{\sqrt{35}}$ (D) None of these

39. न्यूनतमीकरण करें (Minimium) $z=-x+2y$ जबकि subject to $-x+3y\le 10$, $x+y\le 6$, $x-y\le 2$, $x,y\ge 0$ is

(A) –4 (B) –2 (C) 2 (D) None of these

40. 5 coins are tossed what is the probability of getting 3 heads and 2 tails ?

(A) $\frac{3}{4}$ (B) $\frac{5}{8}$ (C) $\frac{7}{8}$ (D) $\frac{5}{4}$

ANSWERS

1.	(C)	**2.**	(B)	**3.**	(D)	**4.**	(D)	**5.**	(D)	**6.**	(B)	**7.**	(B)	**8.**	(A)	**9.**	(B)	**10.**	(C)
11.	(D)	**12.**	(A)	**13.**	(A)	**14.**	(B)	**15.**	(B)	**16.**	(B)	**17.**	(D)	**18.**	(C)	**19.**	(A)	**20.**	(A)
21.	(C)	**22.**	(A)	**23.**	(C)	**24.**	(B)	**25.**	(B)	**26.**	(A)	**27.**	(A)	**28.**	(D)	**29.**	(A)	**30.**	(C)
31.	(C)	**32.**	(A)	**33.**	(A)	**34.**	(C)	**35.**	(A)	**36.**	(B)	**37.**	(C)	**38.**	(A)	**39.**	(B)	**40.**	(B)

खण्ड – II (गैर – वस्तुनिष्ठ प्रश्न)

SECTION-II (NON-OBJECTIVE TYPE QUESTIONS)

समय : 2 घंटा 05 मिनट **पूर्णांक : 60**
Time : 2 Hours 05 Min. **Full Marks : 60**

लघु उत्तरीय प्रश्न
(Short Answer Type Question)

प्रश्न संख्या 1 से 8 तक लघु उत्तरीय प्रकार के हैं। प्रत्येक के लिए 4 अंक निर्धारित है। **8 × 4 = 32**
Question Nos. 1 to 8 are of short answer type. Each question carries 4 marks. **8 × 4 = 32**

1. सिद्ध करें कि (Prove that) : $\tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\cos^{-1}\frac{a}{b}\right)+\tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\cos^{-1}\frac{a}{b}\right)=\frac{2b}{a}$

2. यदि $f(x)=x^2-5x+7$, तो $f(A)$ का मान बताएँ जब $A=\begin{bmatrix}3 & 1\\ -1 & 2\end{bmatrix}$

If $f(x)=x^2-5x+7$, find $f(A)$ when $A=\begin{bmatrix}3 & 1\\ -1 & 2\end{bmatrix}$

3. Prove that the determinant $\begin{vmatrix}x & \sin\theta & \cos\theta\\ -\sin\theta & -x & 1\\ \cos\theta & 1 & 2\end{vmatrix}$ is independent of θ.

4. हल करें (Solve) : $\sin^{-1}\frac{2a}{1+a^2}+\cos^{-1}\frac{1-b^2}{1+b^2}=2\tan^{-1}x$

5. यदि $y=\cos^{-1}\frac{1-x^2}{1+x^2}$ तो $\frac{dy}{dx}$ का मान निकालें।

If $y=\cos^{-1}\frac{1-x^2}{1+x^2}$, find $\frac{dy}{dx}$

6. समाकलन करें (Integrate) $\int e^{3\log x}\left(x^4+1\right)^{-1}dx$

7. यदि $\vec{a}=4\vec{i}+3\vec{j}+2\vec{k}$ तथा $\vec{b}=3\vec{i}+2\vec{k}$ तब $\left|\vec{b}\times 2\vec{a}\right|$ ज्ञात करें।

If $\vec{a}=4\vec{i}+3\vec{j}+2\vec{k}$ and $\vec{b}=3\vec{i}+2\vec{k}$ then find $\left|\vec{b}\times 2\vec{a}\right|$.

8. एक परिवार में दो बच्चे हैं। यदि ज्ञात हो कि बच्चों में कम-से-कम एक बच्चा लड़का है, तो दोनों बच्चों के लड़का होने की प्रायिकता निकालें।

A family has two children. Find the probability that both of them are boys if it is known that at least one of them is a boy.

दीर्घ उत्तरीय प्रश्न
(Long Answer Type Question)

प्रश्न संख्या 9 से 12 तक दीर्घ उत्तरीय प्रकार के हैं। प्रत्येक के लिए 7 अंक निर्धारित है। **4 × 7 = 28**

Question Nos. 9 to 12 are of short answer type. Each question carries 7 marks. **4 × 7 = 28**

9. हल करें (Solve) : $x \log x \frac{dy}{dx} + y = \frac{2}{x} \log x$

10. सिद्ध करें कि (Prove that) : $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x \log(\tan x)\, dx = 0$

11. Find the image of the point (1,3,4) in the plane $x - y + z = 5$.

12. अधिकतम $z = 5x + 3y$

जबकि $3x + 5y \le 15$

$5x + 2y \le 10$

$x, y \ge 0$

Maximise $z = 5x + 3y$

Subjected to $3x + 5y \le 15$

$5x + 2y \le 10$

$x, y \ge 0$

ANSWERS

1. Let $\frac{1}{2}\cos^{-1}\frac{a}{b} = \theta$

The first term $= \tan\left(\frac{\pi}{4} + \theta\right) = \frac{1 + \tan\theta}{1 - \tan\theta}$

Similarly the second term $= \tan\left(\frac{\pi}{4} - \theta\right) = \frac{1 - \tan\theta}{1 + \tan\theta}$

Therefore the given expression

$$= \frac{1 + \tan\theta}{1 - \tan\theta} + \frac{1 - \tan\theta}{1 + \tan\theta}$$

$$= \frac{(1 + \tan\theta)^2 + (1 - \tan\theta)^2}{1 - \tan^2\theta}$$

$$= \frac{2(1 + \tan^2\theta)}{1 - \tan^2\theta} = \frac{2}{\cos 2\theta}$$

Now $\frac{1}{2}\cos^{-1}\frac{a}{b} = \theta$

$\Rightarrow \quad \cos 2\theta = \dfrac{a}{b}$

$\therefore \quad$ The given expression $= \dfrac{2b}{a}$

2. Since $f(x) = x^2 - 5x + 7$

$\therefore \quad f(A) = A^2 - 5A + 7I$

We have $A^2 = A \cdot A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9+1 & 3+2 \\ -3-2 & -1+4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 5 \\ -5 & 3 \end{bmatrix}$

$\therefore \quad A^2 - 5A + 7I$

$= \begin{bmatrix} 8 & 5 \\ -5 & 3 \end{bmatrix} - 5\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} + 7\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 8 & 5 \\ -5 & 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 15 & 5 \\ -5 & 10 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 7 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 8 & 5 \\ -5 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -15 & -5 \\ 5 & -10 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 7 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 8-15+7 & 5-3+0 \\ -5+5+0 & 3-10+7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

3. Expanding alon the first row, we get

$\Delta = x(-x^2 - 1) - \sin\theta(-x\sin\theta - \cos\theta) + \cos\theta(-\sin\theta + x\cos\theta)$

$= -x^3 + x + x\sin^2\theta + \sin\theta\cos\theta - \sin\theta\cos\theta + x\cos^2\theta$

$= -x^3 + x + x(\sin^2\theta + \cos^2\theta)$

$= -x^3 + x + x$

$= -x^3 + 2x$

Thus Δ is independent of θ.

4. Since $\sin^{-1}\dfrac{2a}{1+a^2} = 2\tan^{-1}a$

and $\cos^{-1}\dfrac{1-b^2}{1+b^2} = 2\tan^{-1}b$

$\therefore \quad \tan^{-1}a + \tan^{-1}b = \tan^{-1}x$

$\Rightarrow \quad \tan^{-1}\dfrac{a+b}{1-ab} = \tan^{-1}x$

$\boxed{x = \dfrac{a+b}{1-ab}}$

5. Putting $x = \tan\theta$, we get

$$y = \cos^{-1}\frac{1-\tan^2\theta}{1+\tan^2\theta} = \cos^{-1}(\cos 2\theta) = 2\theta = 2\tan^{-1}x$$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = 2\times\frac{1}{1+x^2} = \frac{2}{1+x^2}$$

6. Let $I = \int e^{3\log x(x^4+1)^{-1}dx}$

Since $e^{a\log x} = x^a$, we have

$$I = \int x^3(x^4+1)^{-1}dx = \int\frac{x^3}{x^4+1}dx$$

Putting $x^4+1 = t$ then $4x^3dx = dt$

$$\therefore \quad I = \int\frac{dt}{4t} = \frac{1}{4}\log t$$

$$\boxed{\frac{1}{4}\log(x^4+1)+c}$$

7. We have $\vec{a} = 4\vec{i}+3\vec{j}+2\vec{k}$

$$\Rightarrow \quad 2\vec{a} = 8\vec{i}+6\vec{j}+4\vec{k}$$

and $\vec{b} = 3\vec{i}+2\vec{k} = 3\vec{i}+0\vec{j}+2\vec{k}$

$$\therefore \quad \vec{b}\times 2\vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 0 & 2 \\ 8 & 6 & 4 \end{vmatrix}$$

$$= \vec{i}(0-12)-\vec{j}(12-16)+\vec{k}(18-0)$$

$$= \boxed{-12\vec{i}+4\vec{j}+18\vec{k}}$$

Hence $\left|\vec{b}\times 2\vec{a}\right| = \sqrt{12^2+4^2+18^2} = \sqrt{2^2(6^2+2^2+9^2)} = \sqrt{2^2(36+4+81)} = 2\sqrt{121} = 2\times 11 = 22$

8. Let B = Boys, G = Girls

(sample space) $S = \{BB, GB, BG, GG\}$

$n(S) = 4$

Let E = Event of both are boys

F = Event of at least one boys

then $E = \{BB\}$, $F = \{BB, GB, BG\}$

$\therefore \quad E \cap F = \{B,B\}$

$n(E) = 1 \quad n(F) = 3 \quad n(E \cap F) = 1$

$\therefore \quad P(F) = \frac{3}{4} \;\; P(E \cap F) = \frac{1}{4}$

Hence $\boxed{P\left(\frac{E}{F}\right) = \frac{P(E \cap F)}{P(F)}}$

$$= \frac{\frac{1}{4}}{\frac{3}{4}} = \frac{1}{3}$$

9. The given equation may be written as

$$\frac{dy}{dx} + \frac{1}{x \log x} y = \frac{2}{x^2}$$

Here $P = \frac{1}{x \log x}$ and $Q = \frac{2}{x^2}$

Now $\int P \cdot dx = \int \frac{1}{x \log x} dx$

Let $I = \int \frac{1}{x \log x} dx$

For the integral, put $\log x = u$ so that

$$\frac{1}{x} dx = du$$

$\therefore \quad I = \int \frac{du}{u} = \log u = \log(\log x)$

Hence $\int P dx = \log(\log x)$

$\therefore \quad IF = e^{\int P dx} = e^{\log(\log x)} = \log x$

Hence the solution is

$$y \log x = \int \frac{2}{x^2} \log x dx = 2 \int x^{-2} \log x dx$$

$$= 2\left[(\log x) \frac{x^{-2+1}}{-2+1} - \int \frac{1}{x} \cdot \left(-\frac{1}{x} \right) \right] dx$$

Using integration by parts

$$= 2\left[-\frac{1}{x} \log x + \int \frac{1}{x^2} dx \right]$$

$$= 2\left[-\frac{1}{x}\log x - \frac{1}{x}\right] + c$$

$$= \boxed{-\frac{2}{x}(\log x + 1) + c}$$

10. Let $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x \log(\tan x)dx$

then $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \log\left\{\tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right\} dx$

$\boxed{\text{Since } \int_0^a f(x)dx = \int_0^a f(a-x)dx}$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(\pi - 2x) \log(\cot x)dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x \log\left(\frac{1}{\tan x}\right) dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x(-\log\tan x)dx$$

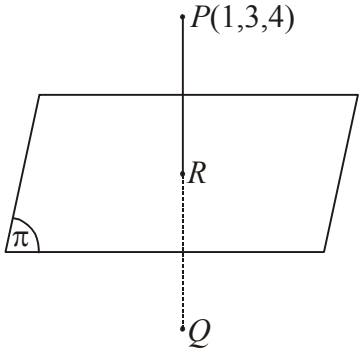
$$= -\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x \log(\tan x)dx$$

$$= -I$$

$\Rightarrow \quad I + I = 0$

$\therefore \quad I = 0$

11. माना कि दत्त बिन्दु $P(1,3,4)$ तथा समतल π है जिसका समीकरण $x - y + z = 5$ है।



माना कि बिन्दु P का प्रतिबिम्ब (image) Q है तो PQ समतल का अभिलम्ब (normal) है।

$\therefore$ PQ का दिक्-अनुपात $1, -1, 1$ हैं।

$\therefore$ PQ बिंदु $P(1,3,4)$ से जाती है तथा इसका दिक्-अनुपात $1, -1, 1$ है इसलिए इसका समीकरण है।

$$\frac{x-1}{1} = \frac{y-3}{-1} = \frac{z-4}{4} = \lambda(\text{माना})$$

$x = 1 + \lambda, y = 3 - \lambda, z = 4 + \lambda$

फिर माना कि Q के निर्देशांक $(1 + \lambda, 3 - \lambda, 4 + \lambda)$ हैं तो मध्य-बिन्दु R के निर्देशांक है।

$\left(\frac{1+1+\lambda}{2}, \frac{3+3-\lambda}{2}, \frac{4+4+\lambda}{2}\right)$ i.e. $\left(\frac{2+\lambda}{2}, \frac{6-\lambda}{2}, \frac{8+\lambda}{2}\right)$

पुनः बिन्दु R समतल $x - y + z = 5$ में है।

$\therefore \quad \frac{2+\lambda}{2} - \frac{6-\lambda}{2} + \frac{8+\lambda}{2} = 5$

$\Rightarrow \quad 2 + \lambda - 6 + \lambda + 8 + \lambda = 10$

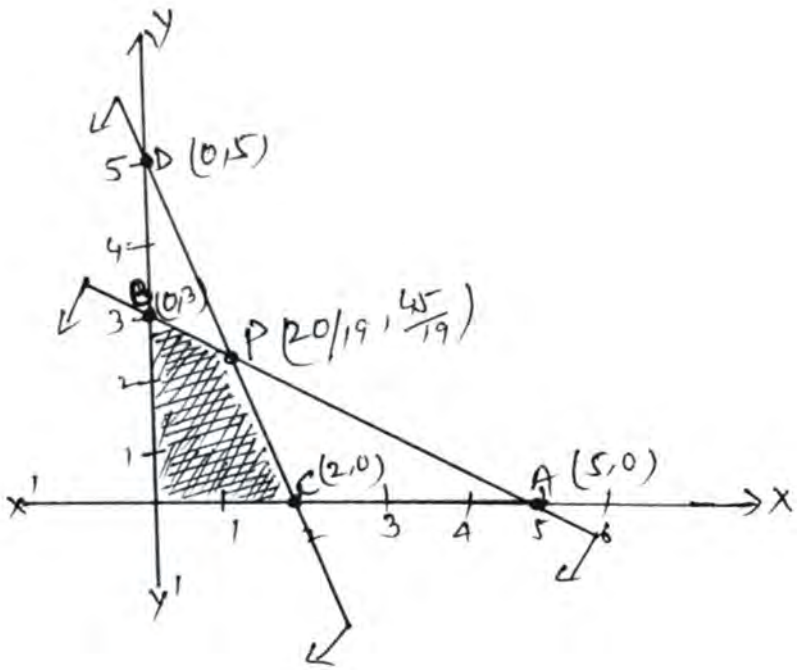
$\Rightarrow \quad 3\lambda = 10 - 4$

$\Rightarrow \quad \lambda = 2$

$\Rightarrow$ बिन्दु Q (3,1,6) है अर्थात् प्रतिबिम्ब (3,1,6) है।

12. First of all, we shall determine the feasible region of the given system of inequations.

The shaded region in the figure above is the feasible region determined by the given system of constraints. We observe that the feasible region *OCPB* is bounded. So we use corner point method to determined the maximum value of *z*. The co-ordinates of the corner points *O*,*C*,*P*,*B* are (0,0), (2,0), $\left(\frac{20}{19}, \frac{45}{19}\right)$ and (0,3) respectively.



Now we evaluate $z = 5x + 3y$ at each corner point.

Corner point	Corresponding of $Z = 5x + 3y$
(0,0)	0
(2,0)	10
$\left(\frac{20}{19}, \frac{45}{19}\right)$	$12\frac{7}{19} \leftarrow$ Max.
(0,3)	9

Hence max. value of z is $12\frac{7}{19}$ at the point $\left(\frac{20}{19}, \frac{45}{19}\right)$.

SET-9

समय : 1 घंटा 10 मिनट | पूर्णांक : 40

Time : 1 Hours 10 Min. | **Full Marks : 40**

खण्ड – I (वस्तुनिष्ठ प्रश्न)

SECTION-I (OBJECTIVE TYPE QUESTIONS)

प्रश्न संख्या 1 से 40 तक निम्न में दिए गए चार विकल्पों में से एक ही उत्तर सही है। प्रत्येक प्रश्न के सही उत्तर को उत्तर तालिका में चिह्नित करें। **40 × 1 = 40**

From Question No. 1 to 40 there is one correct answer. In each question you have to mark that correct option from given options. **40 × 1 = 40**

1. $x * y = 1 + 12x + xy, \forall\, x,y \in R$ द्वारा परिभाषित Q में एक द्विअधारी संक्रिय * पर विचार कीजिए तो $2 * 3$ बराबर है

Consider the binary operation * on Q defined by $x * y = 1 + 12x + xy, \forall\, x,y \in R$ then $2 * 3$ equals.

(A) 31 (B) 41 (C) 43 (D) 51

2. $f: A \to B$ will be an into function if

(A) $f(A) \subset B$ (B) $f(A) = B$ (C) $B \subset f(A)$ (D) $f(B) \subset A$

3. $f(x) = \sqrt{(x-1)(3-x)}$ फलन का परास है

The range of function $f(x) = \sqrt{(x-1)(3-x)}$ is

(A) (1,3) (B) (0,1) (C) (–2,2) (D) None of these

4. $\sin^{-1}\frac{\sqrt{3}}{2}$ का मुख्य मान है

The principal value of $\sin^{-1}\frac{\sqrt{3}}{2}$ is

(A) $\frac{2\pi}{3}$ (B) $\frac{\pi}{6}$ (C) $\frac{\pi}{4}$ (D) $\frac{\pi}{3}$

5. यदि $\sin^{-1}x + \sin^{-1}y = \frac{\pi}{3}$ तो $\cos^{-1}x + \cos^{-1}y$ का मान होगा

If $\sin^{-1}x + \sin^{-1}y = \frac{\pi}{3}$ then the value of $\cos^{-1}x + \cos^{-1}y$ is

(A) $\frac{\pi}{6}$ (B) $\frac{\pi}{3}$ (C) $\frac{2\pi}{3}$ (D) π

6. $\cos\left[\frac{\pi}{2} + \sin^{-1}\left(\frac{1}{3}\right)\right]$ का मान होगा

The value of $\cos\left[\frac{\pi}{2}+\sin^{-1}\left(\frac{1}{3}\right)\right]$ is

(A) $\frac{1}{3}$ (B) $-\frac{1}{3}$ (C) 1 (D) 0

7. यदि शीर्ष (2, –6), (5,4) और (k, 4) वाले त्रिभुज को क्षेत्रफल 35 वर्ग इकाई हो तो k का मान है
If area of triangle be 35 square unit and its vertcies are (2,–6), (5,4) and (k, 4) then the value of k is

(A) 12 (B) –2 (C) –12, –2 (D) 12, –2

8. यदि एक वर्ग आव्यूह (3 × 3) क्रम का इस प्रकार है कि $A^2 = A$ तो $(I + A)^3 - 7A$ बराबर है
If A is a matrix of order 3 × 3, such that $A^2 = A$ then which is equal to $[(I+A)^3 - 7A]$?

(A) A (B) $I - A$ (C) I (D) $3A$

9. यदि (If) $A=\begin{bmatrix}\alpha & 2\\ 2 & \alpha\end{bmatrix}$ और (and) $|A^3| = 125$, तो α बराबर है (then α is equal to)

(A) ± 1 (B) ± 3 (C) ±4 (D) ±5

10. The roots of the equation are (समीकरण के मूल होगें)

$$\begin{vmatrix}1 & 4 & 20\\ 1 & -2 & 5\\ 1 & 2x & 5x^2\end{vmatrix}$$

(A) –1, –2 (B) –1,2 (C) 1, –2 (D) 1,2

11. Rolle के साध्य में C ज्ञात करें जब $f(x) = 2x^3 - 5x^2 - 4x + 3,\ x \in \left[\frac{1}{3}, 3\right]$

Find the value of C is Roll's theorem when $f(x) = 2x^3 - 5x^2 - 4x + 3,\ x \in \left[\frac{1}{3}, 3\right]$ is

(A) $-\frac{1}{3}$ (B) $\frac{2}{3}$ (C) –2 (D) 2

12. $\int \frac{1}{9x^2+6x+5}dx$ बराबर है (is equal to)

(A) $\frac{1}{9}\tan^{-1}\left(\frac{3x+1}{3}\right)+c$ (B) $\frac{1}{3}\tan^{-1}\left(\frac{3x+5}{3}\right)+c$

(C) $\frac{1}{6}\tan^{-1}\left(\frac{3x+1}{2}\right)+c$ (D) $\frac{1}{5}\tan^{-1}\left(\frac{3x+1}{2}\right)+c$

13. $\int \frac{\cos 2x}{(\sin x+\cos x)^2}dx$ बराबर है (is equal to)

(A) $\frac{1}{\sin x+\cos x}+c$ (B) $\log(\sin x+\cos x)+c$ (C) $\log|\sin x-\cos x|+c$ (D) $\frac{1}{(\sin x+\cos x)^2}$

14. $\int\frac{\sec^2 x}{\text{cosec}^2 x}dx$ का मान होगा ?

The value of $\int\frac{\sec^2 x}{\text{cosec}^2 x}dx$ is

(A) $x-\tan x+c$ (B) $\tan x+x+c$ (C) $\tan x-x+c$ (D) $-\tan x-x+c$

15. अगर (If) $x>a$ $\int\frac{dx}{x^2-a^2}$ बराबर है (is equal to)

(A) $\frac{1}{2a}\log\frac{x-a}{x+a}+k$ (B) $\frac{1}{2a}\log\frac{x+a}{x-a}+k$ (C) $\frac{1}{a}\log(x^2-a^2)+k$ (D) $\log\left(x+\sqrt{x^2-a^2}\right)+k$

16. यदि $\sqrt{x}+\sqrt{y}=5$ तो पर (4,9) $\frac{dy}{dx}=$

If $\sqrt{x}+\sqrt{y}=5$ then at (4,9) $\frac{dy}{dx}=$

(A) $\frac{2}{3}$ (B) $\frac{3}{2}$ (C) $-\frac{3}{2}$ (D) $-\frac{2}{3}$

17. $\int x^2e^{x^3}\cos\left(e^{x^3}\right)dx=$

(A) $\sin\left(e^{x^3}\right)+c$ (B) $\frac{1}{3}\sin\left(e^{x^3}\right)+c$ (C) $-\frac{1}{3}\sin\left(e^{x^3}\right)+c$ (D) $3\sin\left(e^{x^3}\right)+c$

18. $\int_0^1\frac{\left(\tan^{-1}x\right)^2}{1+x^2}dx=$

(A) 1 (B) $\frac{\pi^3}{64}$ (C) $\frac{\pi^3}{19^2}$ (D) None of these

19. कोटि चार (4) के अवकल समीकरण के व्यापक हल में स्वेच्छ अचल की संख्या है।

The number of arbitrary constants in the general solution of a differential solution of fourth order is

(A) zero (B) 2 (C) 3 (D) 4

20. अवकल समीकरण $\frac{ydx-xdy}{y}=0$ का व्यापक हल है।

The general solution of the differential equation $\frac{ydx-xdy}{y}=0$ is

(A) $xy=c$ (B) $x=cy^2$ (C) $y=cx$ (D) $y=cx^2$

21. रैखिक प्रोग्राम के साथ संबंधित समस्या है

Linear programming with problem involving

(A) एक उद्देश्य फलन (single objective functions)

(B) दो उद्देश्य फलन (Double objective functions)

(C) कोई उद्देश्य फलन (No any objective function)

(D) इनमें से कोई नहीं (None of these)

22. इकाई सदिश $\vec{a}$ और $\vec{b}$ के बीच के कोण α के किस मान के लिए $\vec{a}+\vec{b}$ इकाई सदिश होगा

Let $\vec{a}$ and $\vec{b}$ be two unit vectors α be the angle between then vector $\vec{a}+\vec{b}$ is a unit vector if

(A) $\alpha=\frac{\pi}{4}$ (B) $\alpha=\frac{\pi}{3}$ (C) $\alpha=\frac{2\pi}{3}$ (D) $\alpha=\frac{\pi}{2}$

23. एक पासे को 8 बार उछाला जाता है आठ उछाल में तीसरे छः आने की प्रायिकता है

A fair diec is tossed eight times. The probability that a third six is observed on the eight throw is

(A) $\frac{7c_2\times5^5}{67}$ (B) $\frac{7c_2\times5^5}{68}$ (C) $\frac{7c_2\times5^5}{6^6}$ (D) None of these

24. मान निकालें (Evaluate) : $\int\frac{1}{x^{\frac{1}{3}}}dx$

(A) $\frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}}+c$ (B) $\frac{2}{3}x^{\frac{2}{3}}+c$ (C) $\frac{2}{3}x^{\frac{-2}{3}}+c$ (D) None of these

25. $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sqrt{\cos x}}{\sqrt{\sin x}+\sqrt{\cos x}}dx$ बराबर है (is equal to)

(A) $\frac{\pi}{4}$ (B) $-\frac{\pi}{4}$ (C) 0 (D) $\frac{\pi}{2}$

26. $\int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(x^3+x\cos x+\tan^5 x+1\right)dx=$

(A) $\frac{\pi}{2}$ (B) π (C) 0 (D) 2

27. $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sqrt{\tan x}+\sqrt{\cot x}dx=$

(A) $\frac{\pi}{\sqrt{2}}$ (B) $\frac{\frac{\pi}{2}}{\sqrt{2}}$ (C) $\frac{\pi}{4}\sqrt{2}$ (D) None of these

28. वक्र $y = \cos x$, x-अक्ष और $x = -\frac{\pi}{2}$ और $x = \frac{\pi}{2}$ से घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल है।

Area included between the curve $y = \cos x$ the x-axis and co-ordinates $x = -\frac{\pi}{2}$ and $x = \frac{\pi}{2}$ is

(A) 2 sq. units (B) 4 sq. units (C) 6 sq. units (D) 8 sq. units

29. अवकल समीकरण $\frac{dy}{dx} = e^{x+y}$ का व्यापक हल है।

The general solution of the differential equation $\frac{dy}{dx} = e^{x+y}$ is

(A) $e^x + e^y = c$ (B) $e^x + e^{-y} = c$ (C) $e^{-x} + e^y = c$ (D) $e^{-x} + e^{-y} = c$

30. $y^2 = 2c\left(x + 2\sqrt{c}\right)$ c जहाँ एक धनात्मक प्राचल है, से निरुपित होने वाले वक्र-कुल का अवकल समीकरण निम्नांकित में किस प्रकार का होगा?

The differential equaion representing the family of curves $y^2 = 2c\left(x + 2\sqrt{c}\right)$, where c is a positive parameter is of

(A) order 1 (B) order 2 (C) order 3 (D) order 4

31. x के किस मान के लिए $x\left(\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}\right)$ एक इकाई सदिश है

For which value of x, $x\left(\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}\right)$ is a unit vector

(A) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ (B) $\frac{1}{\sqrt{3}}$ (C) $\pm\frac{1}{\sqrt{3}}$ (D) $-\frac{1}{\sqrt{3}}$

32. सदिश $\vec{a} = 2\vec{i} - \vec{j} + 3\vec{k}$ और $\vec{b} = \vec{i} + 3\vec{j} + 2\vec{k}$ के बीच कोण का sine है

The sine angle between the vector $\vec{a} = 2\vec{i} - \vec{j} + 3\vec{k}$ and $\vec{b} = \vec{i} + 3\vec{j} + 2\vec{k}$ is

(A) $\frac{3}{14}\sqrt{19}$ (B) $\frac{14}{3}\sqrt{19}$ (C) $\frac{15}{3}\sqrt{19}$ (D) $\frac{3}{15}\sqrt{19}$

33. यदि (If) $\vec{a} = 4\vec{i} + 3\vec{j} + 4\vec{k}$ और (and) $\vec{b} = 3\vec{i} + 2\vec{k}$ तो (then) $\left|\vec{b} \times 2\vec{a}\right|$ is

(A) 18 (B) 20 (C) 22 (D) 25

34. तल $x = 0$ और $y = 0$ है

The plane $x = 0$ and $y = 0$ is

(A) सामान्तर है (are parallel) (B) एक-दूसरे के लम्बवत (are perpendicular to each other)

(C) z-अक्ष में प्रतिच्छेदी (intersect in z -axis) (D) इनमें से कोई नहीं (None of these)

35. रेखाएँ $\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-3}{4}$ और $\frac{x-1}{3} = \frac{y-2}{4} = \frac{z-3}{5}$ है

The lines $\frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{3}=\frac{z-3}{4}$ and $\frac{x-1}{3}=\frac{y-2}{4}=\frac{z-3}{5}$

(A) समानान्तर (parallel)(B) विषमतलीय (skew) (C) प्रतिच्छेदी (intersecting) (D) None of these

36. एक जोड़ा पासा फेंका जाता है। दोनों पर सम रूढ़ संख्या पाने की प्रायिकता है।

A pair of dice are rolled. The probability of obtaining an even prime number on each die is

(A) $\frac{1}{36}$ (B) $\frac{1}{12}$ (C) $\frac{1}{6}$ (D) 0

37. यदि $P(A \cup B) = 0.8$ और $P(A \cap B) = 0.3$ तो $P\left(\overline{A}\right)+P\left(\overline{B}\right)=$

If $P(A \cup B) = 0.8$ and $P(A \cap B) = 0.3$ then $P\left(\overline{A}\right)+P\left(\overline{B}\right)=$

(A) 0.3 (B) 0.5 (C) 0.7 (D) 0.9

38. सदिश $\vec{i}+\vec{j}$ और $\vec{j}+\vec{k}$ पर लम्ब इकाई सदिश बराबर है

A unit vector perpendicular to both $\vec{i}+\vec{j}$ and $\vec{j}+\vec{k}$ is equal to

(A) $\vec{i}-\vec{j}+\vec{k}$ (B) $\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}$ (C) $\frac{\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}}{3}$ (D) $\frac{\vec{i}-\vec{j}+\vec{k}}{\sqrt{3}}$

39. रेखा $\frac{x-1}{1}=\frac{y-2}{2}=\frac{z}{0}$ तल $3x-y+z=0$ को किस बिन्दु पर काटती है?

At what point does the line $\frac{x-1}{1}=\frac{y-2}{2}=\frac{z}{0}$ cut the plane $3x-y+z=0$

(A) (0,0,0) (B) (1,2,0) (C) (0,1,1) (D) None of these

40. यादृच्छिक चर x का माध्य और प्रसरण 4 और 2 है, तब $P(x = 1)$ है

The mean and variance of a random variable x having a binomial distribution are 4 and 2 respectively, then $P(x = 1)$ is

(A) $\frac{1}{32}$ (B) $\frac{1}{16}$ (C) $\frac{1}{8}$ (D) $\frac{1}{4}$

ANSWERS

1. (A)	**2.** (A)	**3.** (B)	**4.** (D)	**5.** (C)	**6.** (B)	**7.** (B)	**8.** (C)	**9.** (B)	**10.** (B)
11. (D)	**12.** (C)	**13.** (B)	**14.** (C)	**15.** (A)	**16.** (C)	**17.** (B)	**18.** (D)	**19.** (D)	**20.** (C)
21. (A)	**22.** (D)	**23.** (B)	**24.** (A)	**25.** (B)	**26.** (B)	**27.** (A)	**28.** (A)	**29.** (B)	**30.** (A)
31. (C)	**32.** (A)	**33.** (C)	**34.** (B)	**35.** (D)	**36.** (A)	**37.** (A)	**38.** (C)	**39.** (A)	**40.** (B)

खण्ड – II (गैर – वस्तुनिष्ठ प्रश्न)

SECTION-II (NON-OBJECTIVE TYPE QUESTIONS)

समय : 2 घंटा 05 मिनट **पूर्णांक : 60**
Time : 2 Hours 05 Min. **Full Marks : 60**

लघु उत्तरीय प्रश्न
(Short Answer Type Question)

प्रश्न संख्या 1 से 8 तक लघु उत्तरीय प्रकार के हैं। प्रत्येक के लिए 4 अंक निर्धारित है। **8 × 4 = 32**
Question Nos. 1 to 8 are of short answer type. Each question carries 4 marks. **8 × 4 = 32**

1. सिद्ध करें कि (Prove that) : $2\tan^{-1}\frac{1+x}{1-x}+\sin^{-1}\frac{1-x^2}{1+x^2}=\pi$

2. यदि $A=\begin{bmatrix}3 & -2\\ 4 & -2\end{bmatrix}$ तथा $I=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$ तो k का मान निकालें जब $A^2=kA-2I$

If $A=\begin{bmatrix}3 & -2\\ 4 & -2\end{bmatrix}$ and $I=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$ find k so that $A^2=kA-2I$

3. सिद्ध करें $\begin{vmatrix}x+1 & x+2 & x+a\\ x+2 & x+3 & x+b\\ x+3 & x+4 & x+c\end{vmatrix}=0$ जहाँ a,b,c A.P. में है।

Prove that $\begin{vmatrix}x+1 & x+2 & x+a\\ x+2 & x+3 & x+b\\ x+3 & x+4 & x+c\end{vmatrix}=0$ where a,b,c are given to be in A.P.

4. समीकरण को हल करें (Solve the equation) : $\tan^{-1}\frac{x}{3}+\tan^{-1}\frac{x}{2}=\tan^{-1}x$

5. यदि $y=\tan^{-1}(\sec x+\tan x)$ तो $\frac{dy}{dx}$ का मान निकालें।

If $y=\tan^{-1}(\sec x+\tan x)$, then find $\frac{dy}{dx}$.

6. समाकलन करें (Integrate) $\int \cot\theta\log(\sin\theta)\,d\theta$

7. यदि $\left(2\vec{i}+6\vec{j}+27\vec{k}\right)\times\left(\vec{i}+\lambda\vec{j}+\mu\vec{k}\right)=0$ तो λ तथा μ का मान ज्ञात करें

Find λ and μ if $\left(2\vec{i}+6\vec{j}+27\vec{k}\right)\times\left(\vec{i}+\lambda\vec{j}+\mu\vec{k}\right)=0$

8. एक खिलाड़ी के हाथ में 7 पत्ते इनमें 5 पत्ते लाल है और इन पाँचों में दो बादशाह हैं। एक पत्ता यदृच्छया खीचा जाता है। इसके बादशाह होने की प्रायिकता निकालें जबकि यह मालूम है कि वह पत्ता लाल है।

A player has 7 cards in hand of which 5 are red and of these five 2 are kings. A card is drawn at random. Find the probability that it is a king, it is known that it is red.

दीर्घ उत्तरीय प्रश्न
(Long Answer Type Question)

प्रश्न संख्या 9 से 12 तक दीर्घ उत्तरीय प्रकार के हैं। प्रत्येक के लिए 7 अंक निर्धारित है। **4 × 7 = 28**

Question Nos. 9 to 12 are of short answer type. Each question carries 7 marks. **4 × 7 = 28**

9. हल करें (Solve) : $ydy-(1-x^2-y^2)xdx=0$

10. मान निकालें (Evaluate) : $\int_0^{\pi}\log(1+\cos x)dx$

11. If the point $(1,1,P)$ and $(-3,0,1)$ be equidistant from the plane $\vec{r}\cdot\left(3\vec{i}+4\vec{j}-12\vec{k}\right)+13=0$ then find the value of P.

12. न्यूनतमीकरण तथा अधिकतम $z=x+2y$

जबकि $x+2y\geq 100,\ 2x-y\leq 0$

$2x+y\leq 200$

$x,y\geq 0$

Minimise and Maximise $z=x+2y$

Subject to $x+2y\geq 100,\ 2x-y\leq 0$

$2x+y\leq 200$

$x,y\geq 0$

ANSWERS

1. We put $x=\tan\theta$ when

$$2\tan^{-1}\frac{1+x}{1-x}=2\tan^{-1}\frac{1+\tan\theta}{1-\tan\theta}=2\tan^{-1}\left\{\tan\left(\frac{\pi}{4}+\theta\right)\right\}=2\left(\frac{\pi}{4}+\theta\right)=\frac{\pi}{2}+2\theta$$

$$\sin^{-1}\frac{1-x^2}{1+x^2}=\sin^{-1}\frac{1-\tan^2\theta}{1+\tan^2\theta}=\sin^{-1}(\cos 2\theta)=\sin^{-1}\left\{\sin\left(\frac{\pi}{2}-2\theta\right)\right\}=\frac{\pi}{2}-2\theta$$

Hence $2\tan^{-1}\frac{1+x}{1-x}+\sin^{-1}\frac{1-x^2}{1+x^2}=\left(\frac{\pi}{2}+2\theta\right)+\left(\frac{\pi}{2}-2\theta\right)=\pi$

2. We have $A^2=A\cdot A=\begin{bmatrix}3&-2\\4&-2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3&-2\\4&-2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}9-8&-6+4\\12-8&-8+4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&-2\\4&-4\end{bmatrix}$

$$\therefore \quad A^2+2I=\begin{bmatrix}1 & -2\\ 4 & -4\end{bmatrix}+2\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & -2\\ 4 & -4\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}2 & 0\\ 0 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1+2 & -2+0\\ 4+0 & -4+2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3 & -2\\ 4 & -2\end{bmatrix}=A$$

Hence $k=1$

3. By applying $R_1 \to R_1+R_3-2R_2$ and $R_2 \to R_2-R_3$

We get $\Delta=\begin{vmatrix}0 & 0 & a+c-2b\\ -1 & -1 & b-c\\ x+3 & x+4 & x+c\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0 & 0 & 0\\ -1 & -1 & b-c\\ x+3 & x+4 & x+c\end{vmatrix}=0$

Since a,b,c are in A.P.

$\therefore \quad \boxed{2b=a+c}$

4. From the given equation

$$\tan^{-1}\frac{\frac{x}{3}+\frac{x}{2}}{1-\frac{x}{3}\cdot\frac{x}{2}}=\tan^{-1}x$$

$$\Rightarrow \quad \tan^{-1}\frac{5x}{6-x^2}=\tan^{-1}x$$

Provided $\frac{x}{3}\cdot\frac{x}{2}<1$ i.e. $x^2<6$

$$\Rightarrow \quad \frac{5x}{6-x^2}=x$$

$\Rightarrow \quad 5x-x\,(6-x^2)=0$

$\Rightarrow \quad x(5-6+x^2)=0$

$\Rightarrow \quad x=0$ or, $x^2-1=0$

$\Rightarrow \quad x=0$ or, $x=\pm 1$

Hence $x=0$, 1 or -1.

5. Since $\sec x+\tan x+\frac{1+\sin x}{\cos x}=\tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)$

$$\therefore \quad y=\tan^{-1}\left\{\tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)\right\}=\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}$$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx}=\frac{1}{2}$$

6. Let $\log\sin\theta=z$

$\therefore \quad$ Differentiating, $\frac{1}{\sin\theta}\cos\theta d\theta=dz$

$\Rightarrow \quad \cot\theta d\theta = dz$

$\therefore \quad I = \int z dz = \frac{z^2}{2} = \frac{1}{2}(\log\sin\theta)^2 + c$

7. Let $\vec{a} = 2\vec{i} + 6\vec{j} + 27\vec{k}$ and $\vec{a} = \vec{i} + \lambda\vec{j} + \mu\vec{k}$

then $\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 6 & 27 \\ 1 & \lambda & \mu \end{vmatrix} = \vec{i}(6\mu - 27\lambda) - \vec{j}(2\mu - 27) + \vec{k}(2\lambda - 6)$

Hence $\vec{a} \times \vec{b} = 0$

$\Rightarrow \quad 6\mu - 27\lambda = 0$ …(i)

$2\mu - 27 = 0$ …(ii)

and $2\lambda - 6 = 0$ …(iii)

(iii) $\Rightarrow 2\lambda = 6 \Rightarrow \lambda = 3$

(ii) $\Rightarrow 2\mu = 27 \Rightarrow \mu = \frac{27}{2}$

These values of λ and μ also satisfy the equation (i).

Therefore $\lambda = 3$ and $\mu = \frac{27}{2}$.

8. Let A = Event of Red card

B = Event of king

then $n(A) = 5$

again $A \cap B$ = Event of Red card and king

$n(A \cap B) = 2$

$\therefore \quad P\left(\frac{B}{A}\right) = \frac{n(A \cap B)}{n(A)} = \frac{2}{5}$

9. The given equation may be written as

$$y\frac{dy}{dx} = (1 - x^2)x - xy^2$$

$\Rightarrow \quad y\frac{dy}{dx} + xy^2 = (1 - x^2)x$ …(i)

Putting $y^2 = z$ so that $2y\frac{dy}{dx} = \frac{dz}{dx}$

the equation (i) becomes

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{dz}{dx} + xz = (1 - x^2)x$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dz}{dx} + 2xz = 2\left(1 - x^2\right)x$$

which is a linear differential equation

Here $P = 2x$ and $Q = (1 - x^2)x$

$$\therefore \quad I.F = \int_e P dx = \int_e 2x dx = e^{x^2}$$

Hence the solution is

$$z \cdot e^{x^2} = \int 2(1 - x^2) \cdot x e^{x^2} dx \qquad \ldots(ii)$$

To evaluate the R.H.S. of (ii) we put $x^2 = t$ so that $2xdx = dt$

$\therefore$ RHS of (ii)

$$= \int (1 - t) e^t dt = \int \left(e^t - te^t\right) dt$$

$$= \int e^t dt - \int te^t dt$$

$$= e^t - \left[te^t - \int 1 \cdot e^t dt\right]$$

$$= e^t - (te^t - e^t)$$

$$= e^t - te^t + e^t$$

$$= 2e^t - te^t$$

$$= e^t(2 - t)$$

$$= e^{x^2}\left(2 - x^2\right)$$

Hence (ii) becomes

$$z \cdot e^{x^2} = \left(2 - x^2\right)e^{x^2} + c$$

$$\Rightarrow \quad z = \left(2 - x^2\right) + Ce^{-x^2}$$

$$\Rightarrow \quad y^2 = \left(2 - x^2\right) + Ce^{-x^2}$$

10. Let $I = \int_0^{\pi} \log\left(1 + \cos x\right) dx$

$$= \int_0^{\pi} \log\left(2\cos^2 \frac{x}{2}\right) dx$$

$$= \int_0^{\pi} \left[\log 2 + \log \cos^2 \frac{x}{2}\right] dx$$

$$= \int_0^{\pi} (\log 2) dx + \int_0^{\pi} 2 \log \cos \frac{x}{2} dx$$

$$= \pi \log 2 + 2\int_0^{\pi} \log \cos \frac{x}{2} dx$$

$$= \pi \log 2 + 2I_1 \qquad \ldots(i)$$

In I_1, Put $\frac{x}{2}=t$ so that $dx=2dt$

$I_1=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\log\cos t\cdot 2dt=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\log\cos x dx$

Hence from (i)

$$I=\pi\log 2+4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\log\cos^x dx \;=\pi\log 2+4\left\{-\frac{\pi}{4}\log 2\right\}\;=\pi\log 2-2\pi\log 2=-\pi\log 2$$

11. माना कि समतल $\vec{r}\cdot\vec{n}=d$ है तो बिन्दु $\vec{a}$ से इस समतल की लाम्बिक दूरी $=\left|\, d=\vec{a}\cdot\vec{n}\,\right|$

यहाँ समतल का समीकरण है, $\vec{r}\cdot\left(3\vec{i}+4\vec{j}-12\vec{k}\right)+13=0$

$$\Rightarrow\quad \vec{r}\cdot\left(\frac{3}{13}\vec{i}+\frac{4}{13}\vec{j}-\frac{12}{13}\vec{k}\right)=\frac{-13}{13}=-1$$

बिंदु (1,1,*P*) के लिए

$$\vec{a}=\vec{i}+\vec{j}+p\vec{k}, d=\frac{-13}{13}=-1$$

$$\vec{n}=\frac{3\vec{i}+4\vec{j}-12\vec{k}}{\left|\,3\vec{i}+4\vec{j}+2\vec{k}\,\right|}=\frac{3\vec{i}+4\vec{j}-12\vec{k}}{\sqrt{9+16+144}}=\frac{3\vec{i}+4\vec{j}+12\vec{k}}{\sqrt{169}}=\frac{3\vec{i}+4\vec{j}+12\vec{k}}{13}$$

$$\Rightarrow\quad \vec{a}\cdot\vec{n}=\left(\vec{i}+\vec{j}+P\vec{k}\right)\cdot\frac{\left(3\vec{i}+4\vec{j}-12\vec{k}\right)}{13}=\frac{3+4-12P}{13}=\frac{7-12P}{13}$$

अब लाम्बिक दूरी $=\left|\, d-\vec{a}\cdot\vec{n}\,\right|=\left|\,\frac{-13}{3}-\frac{7-12P}{13}\,\right|=\left|\,\frac{12P-20}{13}\,\right|$

बिंदु (–3,0,1) की दशा में

$$\vec{a}=-3\vec{i}\;+\vec{k}$$

$$\vec{a}\cdot\vec{n}=\left(-3\vec{i}+\vec{k}\right)\cdot\left(\frac{3\vec{i}+4\vec{j}-12\vec{k}}{13}\right)=\frac{-9-12}{13}=\frac{-21}{13}$$

$\therefore$ लाम्बिक दूरी $=\left|\, d-\vec{a}\cdot\vec{n}\,\right|=\left|\,\frac{-13}{13}-\frac{-21}{13}\,\right|=\frac{8}{13}$

(i) तथा (ii) से प्रश्नानुसार,

$$\left|\,\frac{12P-20}{13}\,\right|=\frac{8}{13}$$

$\Rightarrow\quad \frac{12P-20}{13}=\pm\frac{8}{13}$

$\Rightarrow\quad 12P-20=\pm 8$

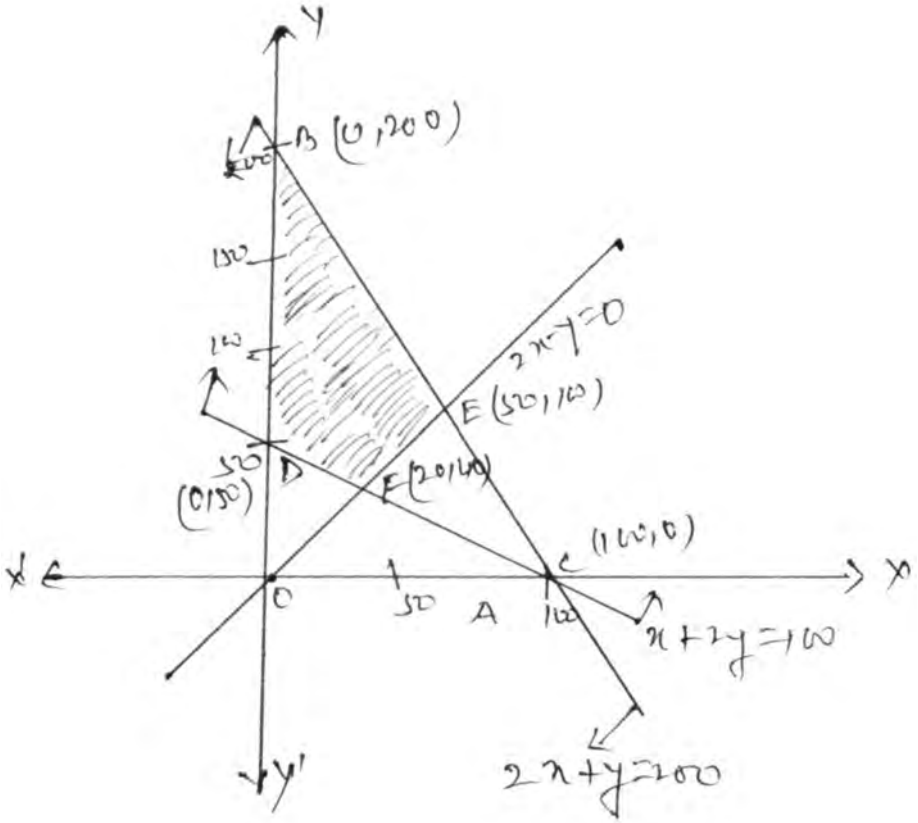
$\Rightarrow\quad 12P=28,12$

$\Rightarrow \quad \boxed{P = \frac{7}{3}, 1}$

12. First of all, we graph the feasible region of the given system of in equations.

The feasible region is the shaded region determined by the given system of constraints. We observe that the feasible region *FEBD* is bounded. So we use corner point method to determine the maxi. and min. value of *z*.

The co-ordinates of the corner points F,E,B,D are (20,40), (50,100), (0,200) and (0,50) respectively. Now we evaluate $z = x + 2y$ at each corner point.



Hence the max. value of *z* is 400 at the point (0,200) and the min. value of *z* is 100 at each of points (0,50) and (20,40) and thus the min. value of *z* is 100 each of the points on the live segement joining the points (0,50) and (20,40).

Corner point	Corresponding of $Z = x + 2y$
(20,40)	100
(50,100)	250
(0,200)	400 ← Max.
(0,50)	100 ← Min.

SET-10

समय : 1 घंटा 10 मिनट | पूर्णांक : 40

Time : 1 Hours 10 Min. | **Full Marks : 40**

खण्ड – I (वस्तुनिष्ठ प्रश्न)

SECTION-I (OBJECTIVE TYPE QUESTIONS)

प्रश्न संख्या 1 से 40 तक निम्न में दिए गए चार विकल्पों में से एक ही उत्तर सही है। प्रत्येक प्रश्न के सही उत्तर को उत्तर तालिका में चिह्नित करें। **40 × 1 = 40**

From Question No. 1 to 40 there is one correct answer. In each question you have to mark that correct option from given options. **40 × 1 = 40**

1. अवकल समीकरण $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^{2/3} = \left(y + \frac{dy}{dx}\right)^{\frac{1}{2}}$ का धात और कोटि निम्न में से कौन है?

(a) 4, 2 (b) 2, 4 (c) 3, 4 (d) 4, 3

The degree & order of differential equation $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^{2/3} = \left(y + \frac{dy}{dx}\right)^{\frac{1}{2}}$ is which of the following?

(a) 4, 2 (b) 2, 4 (c) 3, 4 (d) 4, 3

2. अवकल समीकरण $\left(x^2+1\right)^{dy/dx} + y^2 + 1 = 0$ के हल निम्न में से कौन है?

(a) $y = 2 + x^2$ (b) $y = (1+x)/(1-x)$ (c) $y = x(x-1)$ (d) $y = (1-x)/(1+x)$

The Solution of the differential equation $\left(x^2+1\right)^{dy/dx} + y^2 + 1 = 0$ is which of the following?

(a) $y = 2 + x^2$ (b) $y = (1+x)/(1-x)$ (c) $y = x(x-1)$ (d) $y = (1-x)/(1+x)$

3. $\int_3^5 \frac{x^2}{x^2-4} dx = ?$

(a) $2 - \log_e\left(\frac{15}{7}\right)$ (b) $2 + \log_e\left(\frac{15}{7}\right)$

(c) $2 + 4\log_e^7 - 4\log_e^7 + 4\log_e^5$ (d) $2 - \tan^{-1}\left(\frac{15}{7}\right)$

4. बिन्दु जिसके स्थानिक सदिश क्रमशः $60\hat{i} + 3\hat{j}, 40\hat{i} - 8\hat{j}, x\hat{i} - 52\hat{j}$ हैं, रैखिक होगें यदि x का मान निम्न में से किसके बराबर है?

(a) –40 (b) 40 (c) 20 (d) –20

The point with respective position vector $60\hat{i}+3\hat{j}, 40\hat{i}-8\hat{j}, x\hat{i}-52\hat{j}$ are collinear if x is equal to which of the following?

(a) –40 (b) 40 (c) 20 (d) –20

5. सदिश $a_1\hat{i}+a_2\hat{j}+a_3\hat{k}$ और $b_1\hat{i}+b_2\hat{j}+b_3\hat{k}$ एक दूसरे के लम्बवत है यदि—

(a) $\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\frac{a_3}{b_3}$ (b) $a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3=0$ (c) $a_1b_2+b_2a_1+a_3b_2=0$ (d) इनमें से कोई नहीं

The vector $a_1\hat{i}+a_2\hat{j}+a_3\hat{k}$ and $b_1\hat{i}+b_2\hat{j}+b_3\hat{k}$ are perpendicular to each other if—

(a) $\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\frac{a_3}{b_3}$ (b) $a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3=0$ (c) $a_1b_2+b_2a_1+a_3b_2=0$ (d) None of these

6. बिन्दु A (3, 4, –7) और B (1, –1, 6) से गुजरने वाली रेखा का सदिश समीकरण निम्न में से कौन है?

(a) $\vec{r}=(3\hat{i}+4\hat{j}-7\hat{k})=\lambda(\hat{i}-\hat{j}+6\hat{k})$ (b) $\vec{r}=(\hat{i}-\hat{j}+6\hat{k})+\lambda(3\hat{i}-4\hat{j}+7\hat{k})$

(c) $\vec{r}=3\hat{i}+4\hat{j}-7\hat{k}+\lambda(-2\hat{i}-5\hat{j}+13\hat{k})$ (d) इनमें से कोई नहीं

The vector equation of the line through the points A (3, 4, –7) and B (1, –1, 6) is which of the following?

(a) $\vec{r}=(3\hat{i}+4\hat{j}-7\hat{k})=\lambda(\hat{i}-\hat{j}+6\hat{k})$ (b) $\vec{r}=(\hat{i}-\hat{j}+6\hat{k})+\lambda(3\hat{i}-4\hat{j}+7\hat{k})$

(c) $\vec{r}=3\hat{i}+4\hat{j}-7\hat{k}+\lambda(-2\hat{i}-5\hat{j}+13\hat{k})$ (d) None of these

7. यदि I एक एकांकी आव्युह है तो कौन सत्य है?

(a) $I^2=I$ (b) $|I|=0$ (c) $|I|=2$ (d) $|I|=5$

If I be a unit matrix then which is true?

(a) $I^2=I$ (b) $|I|=0$ (c) $|I|=2$ (d) $|I|=5$

8. तल $7x+4y-2z+5=0$ पर अभिलम्ब का दिक् कोज्या हैं?

(a) (7, 4, 5) (b) (7, 4, –2) (c) (7, 4, 2) (d) (0, 0, 0)

The direction ratio of normal to the plane $7x + 4y – 2z + 5 = 0$ are which of the following?

(a) (7, 4, 5) (b) (7, 4, –2) (c) (7, 4, 2) (d) (0, 0, 0)

9. यदि सरल रेखा $\frac{x-x_1}{l}=\frac{y-y_1}{m}=\frac{z-z_1}{n}$, तल $ax+by+cz+d=0$ के समान्तर है तो कौन-सा सही है—

(a) $\frac{a}{l}=\frac{b}{m}=\frac{c}{n}$ (b) $al+bm+cn=0$ (c) $al^2+bm^2+cn^2=0$ (d) $a^2l^2+b^2m^2+c^2n^2=0$

If the straight line $\frac{x-x_1}{l}=\frac{y-y_1}{m}=\frac{z-z_1}{n}$ is parallel to the plane $ax+by+cz+d=0$ then which one is correct.

(a) $\frac{a}{l}=\frac{b}{m}=\frac{c}{n}$ (b) $al+bm+cn=0$ (c) $al^2+bm^2+cn^2=0$ (d) $a^2l^2+b^2m^2+c^2n^2=0$

10. सदिश $5\hat{i}+\hat{j}-3\hat{k}$ और $3\hat{i}-4\hat{j}+7\hat{k}$ का अदिश गुणनफल है?

(a) 10 (b) –10 (c) 15 (d) –15

The scaler product of the vectors $5\hat{i}+\hat{j}-3\hat{k}$ and $3\hat{i}-4\hat{j}+7\hat{k}$ is—

(a) 10 (b) –10 (c) 15 (d) –15

11. यदि $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$, तो कौन-सा सत्य है?

(a) $\vec{a} \perp \vec{b}$ (b) $\vec{a} \parallel \vec{b}$ (c) $\vec{a} + \vec{b} = 0$ (d) $\vec{a} - \vec{b} = 0$

If $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$, then which is true?

(a) $\vec{a} \perp \vec{b}$ (b) $\vec{a} \parallel \vec{b}$ (c) $\vec{a} + \vec{b} = 0$ (d) $\vec{a} - \vec{b} = 0$

12. $\frac{d}{dx}\int f(x)dx =$

(a) $f'(x)$ (b) $f(x)$ (c) $f''(x)$ (d) $f(x) + c$

13. $\tan^{-1}\frac{1}{2} + \tan^{-1}\frac{2}{11} = \tan^{-1} a$, '$a$' का मान निम्न में से कौन है?

(a) $\frac{1}{4}$ (b) $\frac{1}{2}$ (c) $\frac{3}{4}$ (d) 1

$\tan^{-1}\frac{1}{2} + \tan^{-1}\frac{2}{11} = \tan^{-1} a$, '$a$' the value of a is which of the following?

(a) $\frac{1}{4}$ (b) $\frac{1}{2}$ (c) $\frac{3}{4}$ (d) 1

14. $\sin(\tan^{-1} x), |x| < | = ?$

(a) $\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ (b) $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ (c) $\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ (d) $\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$

15. $\tan^{-1}\frac{2x}{1-x^2} = ?$

(a) $2\tan^{-1} x$ (b) $2\cos^{-1} x$ (c) $2\sin^{-1} x$ (d) None of these

16. R एक सम्बन्ध इस प्रकार है कि αRB यदि और केवल यदि α, β पर लम्ब है जहाँ α, β एक तल में सरल रेखा है तो सम्बन्ध R है?

Let R be a relation defined as αRB if α is perpendicular to β where α, β are straight lines in a plane, then the relation R is—

(a) Reflexive (b) Symmetric (c) Transitive (d) None of these

17. माना कि R = {(1, 3), (4, 2), (2, 4), (2, 3). (3, 1)} समुच्चय A = {1, 2, 3, 4} पर एक सम्बन्ध है तो सम्बन्ध होगा।

Let R = {(1, 3), (4, 2), (2, 4), (2, 3). (3, 1)} be a relation on the set A = {1, 2, 3, 4}. The relation will be :

(a) A Function (b) Reflexive (c) Not Symmetric (d) Transitive

18. $\hat{k} \times \hat{k} =$

(a) 0 (b) 1 (c) $|k|^2$ (d) None of these

19. रेखा $\vec{r} = (4\hat{i} - \hat{j}) + 5(2\hat{i} + \hat{j} - 3\hat{k})$ और $\vec{r} = (\hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k}) + t(\hat{i} - 3\hat{j} + 2\hat{k})$ के बीच का कोण है?

(a) $\frac{3\pi}{2}$ (b) $\frac{\pi}{3}$ (c) $\frac{2\pi}{3}$ (d) $\frac{\pi}{6}$

The angle between the lines $\vec{r} = (4\hat{i} - \hat{j}) + 5(2\hat{i} + \hat{j} - 3\hat{k})$ and $\vec{r} = (\hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k}) + t(\hat{i} - 3\hat{j} + 2\hat{k})$ is—

(a) $\frac{3\pi}{2}$ (b) $\frac{\pi}{3}$ (c) $\frac{2\pi}{3}$ (d) $\frac{\pi}{6}$

20. रेखाएँ $\frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{3}=\frac{z-4}{4}$ और $\frac{x-2}{3}=\frac{y-4}{4}=\frac{z-5}{5}$ के बीच न्यूनतम दूरी है?

(a) $\frac{1}{6}$ (b) $\frac{1}{\sqrt{6}}$ (c) $\frac{1}{\sqrt{3}}$ (d) $\frac{1}{3}$

The shortest distance between the lines $\frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{3}=\frac{z-4}{4}$ and $\frac{x-2}{3}=\frac{y-4}{4}=\frac{z-5}{5}$ is—

(a) $\frac{1}{6}$ (b) $\frac{1}{\sqrt{6}}$ (c) $\frac{1}{\sqrt{3}}$ (d) $\frac{1}{3}$

21. यदि $P(A)=\frac{3}{8}, P(B)=\frac{1}{2}, P(A\cap B)=\frac{1}{4}$ तो $P\left(\frac{A'}{B'}\right)=$

(a) $\frac{1}{4}$ (b) $\frac{1}{3}$ (c) $\frac{3}{4}$ (d) $\frac{3}{8}$

If $P(A)=\frac{3}{8}, P(B)=\frac{1}{2}, P(A\cap B)=\frac{1}{4}$, then $P\left(\frac{A'}{B'}\right)=$

(a) $\frac{1}{4}$ (b) $\frac{1}{3}$ (c) $\frac{3}{4}$ (d) $\frac{3}{8}$

22. एक द्विपद बटंन के माध्य और प्रसरण क्रमशः 6 और 4 है स्थिर राशि (प्राचल) n का मान है?

(a) 18 (b) 12 (c) 10 (d) 9

The mean and varience of a bionomial distribution are 6 and 4 respectively. The parameter n is—

(a) 18 (b) 12 (c) 10 (d) 9

23. एक द्विपद बटंन के स्थिर राशि (प्राचल) n और P क्रमशः 16 और $\frac{1}{2}$ है तो उसका मानक विचलन होगा?

(a) 2 (b) $\sqrt{2}$ (c) $2\sqrt{2}$ (d) 4

The parameter n and P of a bionomial distribution are 16 and $\frac{1}{2}$ respectively then its standard deviation is equal to—

(a) 2 (b) $\sqrt{2}$ (c) $2\sqrt{2}$ (d) 4

24. $\int_{-1}^{2}\frac{|x|}{x}=?$

(a) 1 (b) -1 (c) 0 (d) 2

25. $\int_0^1\frac{f(x)}{f(x)+f(1-x)}dx=?$

(a) 0 (b) $\frac{1}{2}$ (c) 1 (d) None of these

26. $\int_{\frac{-\pi}{2}}^{\pi/2}\sin^5 x\,dx=?$

(a) 0 (b) $\frac{\pi}{2}$ (c) 1 (d) π

27. $\int (2x+3)^5 dx = ?$

(a) $\frac{(2x+3)^6}{6}+c$ (b) $\frac{(2x+3)^4}{8}+c$ (c) $\frac{(2x+3)^6}{12}+c$ (d) None of these

28. यदि $y = \tan^{-1}\sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}$ तो $\frac{dy}{dx} = ?$

(a) $\frac{-1}{2}$ (b) $\frac{1}{2}$ (c) $\frac{1}{1+x^2}$ (d) इनमें से कोई नहीं

If $y = \tan^{-1}\sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}$ then $\frac{dy}{dx} = ?$

(a) $\frac{-1}{2}$ (b) $\frac{1}{2}$ (c) $\frac{1}{1+x^2}$ (d) None of these

29. यदि $x+y = \sin(x+y)$ तो $\frac{dy}{dx} = ?$

(a) -1 (b) 1 (c) $\frac{1-\cos(x+y)}{\sin^2(x+y)}$ (d) इनमें से कोई नहीं

If $x+y = \sin(x+y)$ then $\frac{dy}{dx} = ?$

(a) -1 (b) 1 (c) $\frac{1-\cos(x+y)}{\sin^2(x+y)}$ (d) None of these

30. यदि $P(A) = 0{\cdot}8, P(B) = 0{\cdot}5$ और $P\left(\frac{B}{A}\right) = 0{\cdot}4$ तो $P\left(\frac{A}{B}\right) = ?$

(a) 0·32 (b) 0·64 (c) 0·16 (d) 0·25

If $P(A) = 0{\cdot}8, P(B) = 0{\cdot}5$ and $P\left(\frac{B}{A}\right) = 0{\cdot}4$ then $P\left(\frac{A}{B}\right) = ?$

(a) 0·32 (b) 0·64 (c) 0·16 (d) 0·25

31. $\begin{vmatrix} \sin 30° & \cos 30° \\ -\sin 60° & \cos 60° \end{vmatrix} = ?$

(a) 1 (b) 0 (c) $\frac{3}{2}$ (d) $\frac{1}{2}$

32. सारणिक $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 8 \\ 6x & 9x & 12x \end{vmatrix}$ का मान है?

(a) 0 (b) 1 (c) $256x$ (d) $256x^2$

Value of the determinant $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 8 \\ 6x & 9x & 12x \end{vmatrix}$ is—

(a) 0 (b) 1 (c) $256x$ (d) $256x^2$

33. यदि A एक वर्ग आव्यूह है कि $A^2 = A$ तो $(1+A)^3 - 7A$ का मान है?

(a) A (b) $1 - A$ (c) 1 (d) 3A

If A is a square matrix such that $A^2 = A$ then $(1+A)^3 - 7A$ is equal to—

(a) A (b) $1 - A$ (c) 1 (d) 3A

34. Which of the following is a scaler matrix?

(a) $\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}$ (b) $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$ (c) $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$ (d) $\begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}$

35. $\int \tan^2 \frac{x}{2} dx = ?$

(a) $\tan \frac{x}{2} - x + c$ (b) $\tan \frac{x}{2} + x + c$ (c) $2\tan \frac{x}{2} + x + c$ (d) $2\tan \frac{x}{2} - x + c$

36. $\int \frac{\sin \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx = ?$

(a) $2\cos \sqrt{x} + c$ (b) $-2\cos \sqrt{x} + c$ (c) $\frac{-\cos \sqrt{x}}{2} + c$ (d) $\frac{\cos \sqrt{x}}{2} + c$

37. यदि $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$, तो adj (A) = ?

(a) $\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ (c) $\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$ (d) $\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$

If $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$, then adj (A) = ?

(a) $\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ (c) $\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$ (d) $\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$

38. वक्र $y = \sin x$ के बिन्दु (0, 0) पर अभिलम्ब का समीकरण है?

(a) $x = 0$ (b) $y = 0$ (c) $x + y = 0$ (d) $x - y = 0$

The equation of normal to the curve $y = \sin x$ at (0, 0) is—

(a) $x = 0$ (b) $y = 0$ (c) $x + y = 0$ (d) $x - y = 0$

39. यदि $\sin y = x \sin (a + y)$, तो $\frac{dy}{dx} = ?$

(a) $\frac{\sin^2 a}{\sin^2 (a+y)}$ (b) $\frac{\sin^2 (a+y)}{\sin a}$ (c) $\frac{\sin a}{\sin (a+y)}$ (d) $\frac{\sin (a+y)}{\sin a}$

If $\sin y = x \sin (a + y)$, then $\frac{dy}{dx} = ?$

(a) $\frac{\sin^2 a}{\sin^2 (a+y)}$ (b) $\frac{\sin^2 (a+y)}{\sin a}$ (c) $\frac{\sin a}{\sin (a+y)}$ (d) $\frac{\sin (a+y)}{\sin a}$

40. $\frac{d}{dx}(\sec^{-1} x) = ?$

(a) $\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$ (b) $\frac{1}{1+x^2}$ (c) $-\frac{1}{1+x^2}$ (d) None of these

ANSWERS

1.—(A)	**2.**—(D)	**3.**—(D)	**4.**—(A)	**5.**—(B)	**6.**—(C)	**7.**—(A)	**8.**—(B)	**9.**—(B)	**10.**—(B)
11.—(A)	**12.**—(B)	**13.**—(C)	**14.**—(D)	**15.**—(A)	**16.**—(B)	**17.**—(C)	**18.**—(A)	**19.**—(B)	**20.**—(B)
21.—(C)	**22.**—(A)	**23.**—(C)	**24.**—(A)	**25.**—(B)	**26.**—(A)	**27.**—(C)	**28.**—(B)	**29.**—(A)	**30.**—(B)
31.—(A)	**32.**—(A)	**33.**—(C)	**34.**—(A)	**35.**—(D)	**36.**—(B)	**37.**—(A)	**38.**—(C)	**39.**—(B)	**40.**—(A)

खण्ड – II (गैर – वस्तुनिष्ठ प्रश्न)

SECTION-II (NON-OBJECTIVE TYPE QUESTIONS)

समय : 2 घंटा 05 मिनट **पूर्णांक : 60**
Time : 2 Hours 05 Min. **Full Marks : 60**

लघु उत्तरीय प्रश्न
(Short Answer Type Question)

प्रष्ठन संख्या 1 से 8 तक लघु उत्तरीय प्रकार के हैं। प्रत्येक के लिए 4 अंक निर्धारित है। **8 × 4 = 32**

Question Nos. 1 to 8 are of short answer type. Each question carries 4 marks. **8 × 4 = 32**

1. यदि $x = a\left(\frac{1+t^2}{1-t^2}\right)$ और $y = \frac{2t}{1-t^2}$ तो $\frac{dy}{dx}$ ज्ञात करें।

   If $x = a\left(\frac{1+t^2}{1-t^2}\right)$ and $y = \frac{2t}{1-t^2}$ find $\frac{dy}{dx}$.

2. दिखावे कि $\sin x\,(1 + \cos x)$ का अधिकतम मान $x = \frac{\pi}{3}$ पर है?

   Show that the maximum value of $\sin x\,(1 + \cos x)$ is at $x = \frac{\pi}{3}$.

3. प्रारम्भिक संक्रिया का उपयोग कर आव्युह $\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ का प्रतिलोम ज्ञात करें?

   Find inverse of the matrix $\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ using elementary operations?

4. एक झोले में 3 सफेद और 6 काले गेंद है जबकि दूसरे झोले में 6 सफेद और 3 काले गेंद है। एक झोला चुना जाता है और उसमें से एक गेंद निकाला जाता है। निकाले गये गेंद के उजले होने की प्रायिकता क्या है?
   A bag contains 3 white and 6 black balls while another bag containg 6 white and 3 black balls. A bag is selected at random and a ball is drawn. Find the probability that the ball drawn is of white colour.

5. $\vec{a}$ और $\vec{b}$ दो सदिश के लिए, सिद्ध करें कि $\left|\vec{a}+\vec{b}\right| \le \left|\vec{a}\right| + \left|\vec{b}\right|$

   For any two vectors $\vec{a}$ and $\vec{b}$, Prove that $\left|\vec{a}+\vec{b}\right| \le \left|\vec{a}\right| + \left|\vec{b}\right|$

6. (मान ज्ञात करें) Evaluate $\begin{vmatrix} b+c & a & a \\ b & c+a & b \\ c & c & a+b \end{vmatrix}$

7. x के मान के लिए हल करें, $\sin\left(\sin^{-1}\frac{1}{5} + \cos^{-x} x\right) = 1$

   Solve for x, $\sin\left(\sin^{-1}\frac{1}{5} + \cos^{-x} x\right) = 1$

8. $\int_1^e \frac{e^x}{x}(1+x\log x)\,dx$ ज्ञात करें।

Find $\int_1^e \frac{e^x}{x}(1+x\log x)\,dx$

दीर्घ उत्तरीय प्रश्न
(Long Answer Type Question)

प्रष्ठन संख्या 9 से 12 तक दीर्घ उत्तरीय प्रकार के हैं। प्रत्येक के लिए 7 अंक निर्धारित है। **4 × 7 = 28**

Question Nos. 9 to 12 are of short answer type. Each question carries 7 marks. **4 × 7 = 28**

9. रेखा $\frac{x-a}{1}=\frac{y}{1}=\frac{z+a}{1}$ और $\frac{x+a}{1}=\frac{y}{1}=\frac{z+a}{2}$ को प्रतिच्छेदी करने वाली और रेखा $\frac{x-a}{2}=\frac{y-b}{1}=\frac{z-2a}{3}$ के समान्तर रेखा का समीकरण ज्ञात करें।

Find the equation of the line intersecting the lines $\frac{x-a}{1}=\frac{y}{1}=\frac{z+a}{1}$ and $\frac{x+a}{1}=\frac{y}{1}=\frac{z+a}{2}$ and parallel to the line $\frac{x-a}{2}=\frac{y-b}{1}=\frac{z-2a}{3}$.

10. $\int_0^{\pi/2}(2\log\sin x-\log\sin 2x)\,dx$ ज्ञात करें।

Find $\int_0^{\pi/2}(2\log\sin x-\log\sin 2x)\,dx$

11. हल करें : $(x^2-1)\frac{dy}{dx}+2xy=\frac{2}{x^2-1}$

Solve $(x^2-1)\frac{dy}{dx}+2xy=\frac{2}{x^2-1}$

12. LPP को हल करें

अधिकतमीकरण $Z = 30x + 25y$

जबकि $3x+3y\le 18$

और $3x+2y\le 15,\ x, y\ge 0$

Solve the LPP

Maximize $Z = 30x + 25y$

Subjected to $3x+3y\le 18$

and $3x+2y\le 15,\ x, y\ge 0$

ANSWERS

1. Given $x=a\left(\frac{1+t^2}{1-t^2}\right)=a\left(-1+\frac{2}{1-t^2}\right)$

Differentiating w.r.t 't'

$$\frac{dx}{dt} = a\left[0 + 2\cdot\frac{-1}{(1-t^2)^2}\cdot(-2t)\right] = \frac{4at}{(1-t^2)^2}$$

Also, $y = \dfrac{2t}{1-t^2}$

$\Rightarrow$ $\dfrac{dy}{dt} = \dfrac{(1-t^2)\cdot 2 - 2t\,(-2t)}{(1-t^2)^2} = \dfrac{2\,(1+t^2)}{(1-t^2)^2}$

$\therefore$ $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy/dt}{dx/dt} = \dfrac{2\,(1+t^2)}{(1-t^2)^2}\times\dfrac{(1-t^2)^2}{4at} = \dfrac{1+t^2}{2at}$

2. Let $y = \sin x\,(1+\cos x)$ ...(i)

$\therefore$ $\dfrac{dy}{dx} = \cos x\,(1+\cos x) + \sin x\,(-\sin x)$

$= \cos x + \cos^2 x - \sin^2 x = \cos x + \cos 2x$ ...(ii)

$\dfrac{d^2y}{dx^2} = \sin x - 2\sin 2x$ ...(iii)

From (iii), at $x = \dfrac{\pi}{3}$, $\dfrac{d^2y}{dx^2} = -\sin\dfrac{\pi}{3} - 2\sin\dfrac{2\pi}{3}$

$= \dfrac{-\sqrt{3}}{2} - 2\dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{-3\sqrt{3}}{2} < 0$

Hence, $y = \sin x\,(1+\cos x)$ has maximum value at $x = \pi/3$

3. Let $\mathrm{A} = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$

Now, $\mathrm{A} = \mathrm{IA}$

Then, $\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\mathrm{A}$

[We use elementary row operation]

$\Rightarrow$ $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\mathrm{A}$ $\quad[\text{Applying } \mathrm{R}_1 \to \mathrm{R}_1 - \mathrm{R}_2]$

$\Rightarrow$ $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}\mathrm{A}$ $\quad[\text{Applying } \mathrm{R}_2 \to \mathrm{R}_2 - \mathrm{R}_1]$

$\Rightarrow$ $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}\mathrm{A}$ $\quad[\text{By } \mathrm{R}_1 \to \mathrm{R}_1 - 2\mathrm{R}_2]$

$\Rightarrow$ $\mathrm{I} = \mathrm{BA}$, where $\mathrm{B} = \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$

$\therefore$ $\mathrm{A}^{-1} = \mathrm{B} = \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$

4. Given that,

	Bag-I	Bag-II
White	3	6
Black	6	3

Let E_1 = Event that bag I is selected
E_2 = Event that bag II is selected
E = Event that the ball drawn is of white colour

So, $P = (E_1) = \frac{1}{2}, \quad P(E_2) = \frac{1}{2}$

Also, $P(E/E_1) = P$ (ball drawn is white when bag I is selected) $= \frac{3}{9}$

$P(E/E_2) = P$ (ball drawn is white when bag II is selected) $= \frac{6}{9}$

By total propability theorem
Required propability $= P(E) \cdot P(E_1) + P(E_2) \cdot P(E/E_2)$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{9} + \frac{1}{2} \cdot \frac{6}{9} = \frac{9}{18} = \frac{1}{2}$$

5. $|\vec{a} + \vec{b}|^2 = (\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} + \vec{b})$

$$= \vec{a} \cdot \vec{a} + \vec{b} \cdot \vec{a} + \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{b}$$

$$= |\vec{a}|^2 + \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{b}|^2$$

$$= |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + 2(\vec{a} \cdot \vec{b})$$

$$\leq |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + 2|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \qquad [\because |\vec{a} \cdot \vec{b}| \leq |\vec{a}| \cdot |\vec{b}|]$$

$$= (|\vec{a}| + |\vec{b}|)^2$$

$\therefore \quad |\vec{a}| + |\vec{b}| \leq |\vec{a}| + |\vec{b}|$

6. $\begin{vmatrix} b+c & a & a \\ b & c+a & b \\ c & c & a+b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} o & -2c & -2b \\ b & c+a & b \\ c & c & a+b \end{vmatrix} \quad [\text{By } R_1 \to R_1 - R_2 - R_3]$

$$= \frac{1}{c} \begin{vmatrix} o & -2c & -2b \\ o & c(c+a-b) & b(c-a-b) \\ c & c & a+b \end{vmatrix} \quad [\text{By } R_2 \to CR_2 - bR_3]$$

$$= \frac{1}{C} C(-2bc)[c - a - b - (c + a - b)] = (-2bc)(-2a)$$

$$= 4abc$$

7. Given, $\sin\left(\sin^{-1}\frac{1}{5} + \cos^{-1}x\right) = 1$

$\Rightarrow \quad \sin\left(\sin^{-1}\frac{1}{5} + \cos^{-1}x\right) = \sin\frac{\pi}{2}$

$\Rightarrow \quad \sin^{-1}\frac{1}{5} + \cos^{-1}x = \frac{\pi}{2}$

$\Rightarrow \qquad \sin^{-1}\frac{1}{5} = \frac{\pi}{2} - \cos^{-1} x = \sin^{-1} x$

$\Rightarrow \qquad x = \frac{1}{5}$

8. $\int \frac{e^x}{x}(1 + x\log x)\, dx = \int e^x \left(\frac{1}{x} + \log x\right) dx$

$= \int e^x (f'(x) + f(x))\, dx \quad$ where $f(x) = \log x$

$= e^x f(x) = e^x . \log x$

$\therefore \qquad \int_1^e \frac{e^x}{x}(1 + x\log x)\, dx = \left[e^x \log x\right]_1^e = e^e \log e^e - e\log 1$

$= e^e$

9. Let $\qquad AB : \frac{x-a}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z+a}{1}$

$CD : \frac{x+a}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z+a}{2}$

Let P $(x_1\, y_1\, z_1)$ and Q $(x_2\, y_2\, z_2)$ lies on AB and CD respectively.

Now, $\frac{x_1 - a}{1} = \frac{y_1}{1} = \frac{z_1 + a}{1} = r_1$ (let)

Let, $x_1 = a + r_1, y_1 = r_1$ and $z_1 = r_1 + a$

and $\frac{x_2 + a}{1} = \frac{y_2}{1} = \frac{z_2 + a}{2} = r_2$ (let)

$\therefore \qquad x_2 = -a + r_2, y_2 = r_2, z_3 = -a + 2r_2$

So, direction ratio of PQ are $(x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$

i.e. $\qquad (r_2 - r_1 - 2a, r_2 - r_1, 2r_2 - r_1 - 2a)$

Since, PQ is paralled to line $\frac{x-a}{2} = \frac{y-a}{1} = \frac{z - za}{3}$

$\therefore \qquad \frac{r_2 - r_1 - 2a}{2} = \frac{r_2 - r_1}{1} = \frac{2r_2 - r_1 - 2a}{3}$

Solving, we get $r_1 = 0$

$\therefore \qquad x_1 = a, y_1 = 0, z_1 = a$

Hence, equation of line passing through $(x_1\, y_1\, z_1)$

i.e. (a, o, a) and paralled to $\frac{x-a}{2} = \frac{y-a}{1} = \frac{z-2a}{3}$ is $\frac{x-a}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z-a}{3}$

10. Let, $\qquad I = \int_0^{\pi/2} (2\log\sin x - \log\sin 2x)\, dx$

$= \int_0^{\pi/2} [(2\log\sin x - \log(2\sin x \cdot \cos x)]\, dx$

$= \int_0^{\pi/2} [2\log\sin x - \log 2 - \log\sin x - \log\cos x]\, dx$

$$= \int_0^{\pi/2} (\log \sin x - \log 2 - \log \cos x)\, dx$$

$$= \int_0^{\pi/2} \log \sin x\, dx - \int_0^{\pi/2} \log 2 dx - \int_0^{\pi/2} \log \cos x\, dx$$

$$= \int_0^{\pi/2} \log \sin x\, dx - \log 2 \int_0^{\pi/2} 1 \cdot dx - \int_0^{\pi/2} \log \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) dx$$

$$\left[\because \int_0^a f(x)\, dx = \int_0^a f(a-x)\, dx\right]$$

$$= \int_0^{\pi/2} \log \sin x\, dx - \log 2 \left[x\right]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} \log \sin x\, dx$$

$$= -(\log 2)\left(\frac{\pi}{2} - 0\right)$$

Hence, $\mathrm{I} = -\frac{\pi}{2} \log 2.$

11. The given differential equation can be written as

$$\frac{dy}{dx} + \frac{2x}{x^2 - 1} \cdot y = \frac{2}{(x^2 - 1)^2}$$

This is a linear defferential equation $\frac{dy}{dx} + py = \mathrm{Q}$ form

Where $\mathrm{P} = \frac{2x}{x^2 - 1}$ and $\mathrm{Q} = \frac{2}{(x^2 - 1)^2}$

Now $\mathrm{I.F.} = e^{\int \frac{2x}{x^2 - 1} dx} = e^{\log (x^2 - 1)} = x^2 - 1$

So, the solution is given by

$$y \times \mathrm{IF} = \int (\mathrm{Q} \times \mathrm{IF})\, dx + \mathrm{C}$$

or, $$y (x^2 - 1) = \int \left[\frac{2}{(x^2 - 1)^2} \times (x^2 - 1)\right] dx + \mathrm{C}$$

$$= 2 \cdot \int \frac{1}{(x^2 - 1)} dx + \mathrm{C} = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \log \left|\frac{x-1}{x+1}\right| + \mathrm{C}$$

or, $$y (x^2 - 1) = \log \left|\frac{x-1}{x+1}\right| + \mathrm{C}$$

hence the solution.

12. First, we draw the lines

$3x + 3y = 18$ ...(1)

and $3x + 2y = 15$ ...(2)

The shaded region OCPB is the feasible region.

The vertices of the feasible region are C (5, 0), P (3, 3), B (0, 6) and O (0, 0)

140

By solving (1) & (2) we get co-ordinate of corner.

The value of $z = 30x + 25y$ at the corner points are as :

$z = 30x + 25y$

At O (0, 0), $Z = 30 \times 0 + 25 \times 0 = 0$

At P (3, 3), $Z = 30 \times 3 + 25 \times 3 = 90 + 75 = 165$

At C (5, 0) $Z = 30 \times 5 + 25 \times 0 = 150$

At B (0, 6), $Z = 30 \times 0 + 25 \times 6 = 150$

Clearly maximum Z is 165 at (3, 3) i.e. when $x = 3$ and $y = 3$